METRON

RIVISTA INTERNAZIONALE DI STATISTICA — REVUE INTERNATIONALE DE STATISTIQUE
INTERNATIONAL REVIEW OF STATISTICS — INTERNATIONALE STATISTISCHE ZEITSCHRIFT

DIRETTORE PROPRIETARIO - DIRECTEUR ET PROPRIÉTAIRE
EDITOR AND PROPRIETOR - HERAUSGEBER UND EIGENTHÜMER

Prof. Dott. Corrado Gini, *direttore dell'Istituto di Statistica e Politica Economica della R. Università di Roma, presidente dell'Istituto Centrale di Statistica del Regno d'Italia.*

COMITATO DIRETTIVO - COMITÉ DE DIRECTION - EDITORIAL COMMITTEE - DIREKTION-KOMITEE

Prof. A. Andréadès, *de Science des finances à l'Université d'Athènes* (Grèce).
Prof. A. E. Bunge, *director general de Estadistica de la Nacion. Buenos Ayres* (Argentina).
Dott. F. P. Cantelli, *professore di Matematica attuariale nel R. Istituto Superiore di Studi Commerciali di Napoli* (Italia).
Dr. C. V. L. Charlier, *professor der Astronomie an der Universität Lund* (Schweden).
Dr. F. von Fellner, *o. öff. Universitäts-Professor in Budapest* (Ungarn).
Prof. A. Flores de Lemus, *jefe de Estadistica del Ministero de Hacienda. Madrid* (España).
Dr. M. Greenwood, *professor of Epidemiology and Vital Statistics in the University of London* (England).
Sir G. H. Knibbs, *former director of the Commonwealth Institute of Science and Industry. Melbourne* (Australia).
Ing. L. March, *directeur honoraire de la Statistique générale de la France. Paris* (France).
Dr. H. W. Methorst, *directeur de l'Office permanent de l'Institut International de Statistique et du Bureau central de Statistique. La Haye* (Pays Bas).
Prof. A. Julin, *secrétaire général du Ministère de l'Industrie et du Travail. Bruxelles* (Belgique).
Dr. R. Pearl, *director of the Institute for Biological Research at the J. Hopkins University. Baltimore* (U. S. A.).
Dr. H. Westergaard, *professor in the University of Copenhagen* (Denmark).

SEGRETARIO DI REDAZIONE - SECRÉTAIRE DE RÉDACTION
EDITORIAL SECRETARY - REDACTIONSECRETÄR

Prof. Gaetano Pietra, *incaricato di Statistica e di Matematica per le Scienze Sociali nella R. Università di Padova. Istituto di Statistica* (Italia).

Vol. VI - N. 2. **I - VI - 1926.**

SOMMARIO — SOMMAIRE — CONTENTS — INHALT

L. March. *L'analyse de la variabilité* . . . . . pag. 3
E. J. Gumbel. *Eine Beziehung zwischen Fehlermassen.* . . . . . » 65
J. Lestschinsky. *Probleme der Bevölkerungs-Bewegung bei den Juden (Fortsetzung)* . . . . . » 87
J. Tivaroni. *Contribuzioni e reddito dei privati in Italia dalla proclamazione del Regno (1861) ai nostri giorni* . . . . » 137
† **Georg von Mayr** . . . . . » 218

PADOVA

AMMINISTRAZIONE DEL "METRON"
R. UNIVERSITÀ - ISTITUTO DI STATISTICA

ARTICOLI GIUNTI ALLA RIVISTA CHE VERRANNO PUBBLICATI NEI PROSSIMI NUMERI.
(*Secondo l'ordine d'arrivo*).

ARTIKEL DIE AN DIE ZEITSCRIFT ANGELANGT SIND UND WELCHE IN DEN NACHFOLGENDEN NUMMERN ERSCHEINEN WERDEN.
(*Nach der Reihenfolge des Eingangs*).

ARTICLES REÇUS PAR LA REVUE ET À PARAITRE PROCHAINEMENT.
(*D'après la date de reception*).

ARTICLES RECEIVED BY THE REVIEW WHICH WILL BE PUBLISHED IN FUTURE ISSUES.
(*According to date of receipt*).

C. Gini. *Sulle leggi della frequenza e delle combinazioni sessuali dei parti plurimi.*

C. Gini e **M. Boldrini.** *Il centro della popolazione italiana.*

C. Gini. *La richesse et les revenus nationaux des Indes Britanniques.*

G. Findlay Shirras. *Production in India before and after the War.*

F. Burkhardt. *Beiträge zur Statistik der Mortalitäts - Unterschiede zwischen den beiden Geschlechtern.*

B. Lagunow. *Zur Praxis der Ausgleichung der statistischen Reihen.*

R. Maunier. *Notes statistiques sur le suicide en Egypte (1887-1918).*

P. Donazzolo e M. Saibante *Lo sviluppo demografico di Verona e della sua provincia dalla fine del sec. XV ai giorni nostri.*

S. Bernstein. *Fondements géométriques de la théorie des correlations.*

L. Galvani. *La stagionalità delle nascite nelle singole famiglie.*

Città di Castello (Umbria) - Società Anonima Tipografica « Leonardo da Vinci »

LUCIEN MARCH.

L'analyse de la variabilité.

1. — L'analyse numérique des observations statistiques emprunte d'ordinaire ses principes à la théorie des probabilités. Or cette theorie met en oeuvre des notions parfois un peu mystérieuses et qui risquent d'être mal interprétées par des esprits peu pénétrants ou insuffisamment préparés.

Aujourd'hui, la statistique intervient dans de nombreux domaines; son enseignement ne doit point exiger de connaissances préalables trop étendues, et pourtant il faut marquer rigoureusement des rapports et des idées. Comme bien d'autres, cet enseignement doit viser à exercer le jugement suivant la méthode cartésienne, à faire examiner les difficultés pas à pas, à permettre des vérifications constantes.

C'est pourquoi nous avons cru avantageux de tirer parti des procédés simples, et à la portée de tous les esprits que BIENAYMÉ a developpés en quelques points au milieu du siècle dernier et qui se fondent sur la règle de la moyenne considérée comme postulat (1).

Dans ce qui suit, nous supposons connus les moyens de caractériser un ensemble de grandeurs, indépendamment de leur ordre, de caractériser les écarts des grandeurs soit autour de leurs moyennes, soit les unes par rapport aux autres, de limiter les champs de variation.

Il s'agit maintenant d'analyser la formation des écarts autour de la moyenne en supposant à cet effet que chaque élément de l'ensemble étudié résulte de la superposition d'éléments composants: par exemple le tonnage des marchandises exportées d'un pays dans une année, résulte des divers éléments de l'activité industrielle dans

(1) Postulat que justifie le sens commun d'après l'expérience des siècles.

le pays exportateur, des demandes des pays importateurs, des prix des diverses marchandises, etc.

Ces circonstances se traduisent par des données numériques variables qui s'associent et se superposent en donnant des résultats qui, en conséquence, se différencient eux mêmes les uns des autres. Et l'on est amené à traiter le problème suivant: Étant donnés des éléments constitués par la superposition ou la juxtaposition de sous-éléments composants, comment se différencient les éléments résultants en égard à la différenciation des éléments composants.

Ceux-ci peuvent soit:

1) former un ensemble déterminé, ce qui crée entre eux une certaine liason; soit

2) être isolés les uns des autres, sans aucun lien.

Le premier cas est celui que nous considérerons tout d'abord (1).

1ère Partie.

Association de groupes formés parmi les éléments d'un ensemble.

2. — Les éléments d'un même ensemble étant donnés, on puise dans ces éléments des groupes formés d'une partie seulement d'entre eux. Les mêmes éléments entrent dans plusieurs groupes, mais chaque groupe ne comprend le même élément qu'une seule fois.

Nous supposerons que l'on forme tous les groupes possibles de n éléments, leur nombre étant égal à ν, en vue de rechercher une relation entre les moyennes des groupes et la moyenne de l'ensemble. Un quelconque des groupes peut-être considéré comme un échantillon, un specimen de l'ensemble des éléments, comme une épreuve, comme un sondage effectué dans cet ensemble. Et ainsi les questions, dont nous allons nous occuper se présentent très fréquemment dans la pratique, toutes les fois que l'on se propose d'évaluer la moyenne des éléments d'un ensemble, quand on ne connait qu'une partie. On se demande alors de combien la moyenne calculée sur la partie peut différer de la moyenne calculée sur l'ensemble.

Veut-on, par exemple, évaluer le salaire moyen des ouvriers d'une région, alors qu'il est impossible de noter les salaires de tous les ouvriers, dont on connait seulement le nombre, on se borne à observer les salaires d'un nombre plus ou moins considérable de ces ouvriers, dont le groupe constitue une épreuve, un échantillon pris dans la

(1) Les trois parties de cet article forment trois chapitres d'un ouvrage qui paraîtra prochainement.

masse des ouvriers de la région. La moyenne des salaires, dans cet échantillon, fournit une valeur approchée de la moyenne générale inconnue qui convient pour l'ensemble des ouvriers de la région.

Mais cette valeur dépend évidemment de la composition de l'échantillon. Avec un autre échantillon, elle eût été différente. Il importe par conséquent de caractériser les différences que présentent les moyennes de tous les échantillons possibles, en calculant, au moins approximativement, la *fluctuation* μ_2'(1) de ces moyennes. D'une manière générale, désignons par S_1 la somme des éléments d'un ensemble

$$x_1 , x_2 , \ldots , x_N$$

de N éléments: la moyenne de ces éléments $M = \frac{S_1}{N}$. Soit S_2 la somme des carrés de ces éléments, leur fluctuation est

$$\mu_2' = \frac{\Sigma (x - M)^2}{N} = \frac{S_2}{N} - M^2$$

D'autre part, si P désigne la somme des produits deux à deux des N éléments, cette somme est égale à $\frac{1}{2}(S_1^2 - S_2)$ et, dans cette somme, un élément particulier entre $N - 1$ fois, puisqu'il forme avec les autres $N - 1$ produits.

Il s'agit de déterminer la fluctuation des ν moyennes calculées pour les ν groupes de n éléments chacun. On y parvient à l'aide des théorèmes ci-après.

3. — Dans les groupes, chaque élément de l'ensemble primitif entre $\frac{n\nu}{N}$ fois. En effet, chaque groupe contient n éléments; il y a ν groupes, donc en tout $n\nu$ éléments, dont N seulement sont distincts. Chaque élément particulier entre donc $\frac{n\nu}{N}$ fois.

Puisque tous les éléments de l'ensemble entrent le même nombre de fois dans la totalité des groupes, la moyenne générale des éléments des groupes est nécessairement la même que la moyenne des éléments de l'ensemble dont les groupes sont issus.

La somme des éléments distincts est S_1; le total des éléments des groupes est donc égal à $\frac{n\nu}{N} \times S_1$; comme le nombre de ces éléments est $n\nu$, leur moyenne est $\frac{S_1}{N} = M$. D'où le théorème suivant:

---

(1) Nous adoptons, en ce sens, le terme employé par EDGEWORTH.

THÉORÈME I. - *Les moyennes des* ν *groupes ont pour moyenne la moyenne des éléments de l'ensemble.*

De même, on calcule la somme des carrés des éléments des groupes. Puisque chaque élément distinct se présente $\frac{n\nu}{N}$ fois dans l'ensemble des groupes, et que la somme des carrés des éléments distincts est S_2, on peut énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME II. - *La somme des carrés des éléments des groupes est égale à la somme* S_2 *des carrés des éléments de l'ensemble primitif multipliée par* $\frac{n\nu}{N}$.

4. — L'application des divers théorèmes, peut être suivie pas à pas, sur l'exemple ci-après § 8.

THÉORÈME III. - *La fluctuation des moyennes des groupes est égale à la fluctuation des* N *éléments de l'ensemble diminuée de la moyenne des fluctuations des éléments de chaque groupe.*

Soit un élément x_h d'un groupe désigné par la lettre i et M_i la moyenne des éléments de ce groupe. En vertu de la propriété de la moyenne

$$\sum_{h=1}^{h=n} (x_h - M_i)^2 = \sum_{h=1}^{h=n} (x_h - M)^2 - n\,(M_i - M)^2$$

Additionnons les égalités semblables que l'on peut former pour les ν groupes. Le résultat peut s'écrire

$$\sum_{i=1}^{i=\nu} \sum_{h=1}^{h=n} (x_h - M_i)^2 = \sum_{i=1}^{i=\nu} \sum_{h=1}^{h=n} (x_h - M)^2 - n \sum_{i=1}^{i=\nu} (M_i - M)^2$$

Dans le premier membre de cette égalité, ainsi que dans le premier terme du second membre, l'élément particulier x_h entre $\frac{n\nu}{N}$ fois, pour la raison indiquée au paragraphe précédent; on peut donc mettre le premier terme du second membre sous la forme

$$\frac{n\nu}{N} \sum_{h=1}^{h=N} (x_h - M)^2$$

puisque M est la même quantité dans toutes les parenthèses.

Le second terme du second membre comprend ν carrés. Dès lors, l'égalité précédente peut s'écrire sous la forme suivante

$$\sum_{i=1}^{i=\nu} \sum_{h=1}^{h=n} (x_h - M_i)^2 = \frac{\nu n}{N} \sum_{h=1}^{h=N} (x_h - M)^2 - n \sum_{i=1}^{i=\nu} (M_i - M)^2$$

Cette fois, les éléments x_h qui entrent dans le premier terme du second membre sont tous différents. Désignons par μ_2 la moyenne

$$\frac{\sum_{i=1}^{i=\nu} (M_i - M)^2}{\nu}$$

des carrés des écarts des moyennes des groupes, ces écarts étant comptés à partir de la moyenne de l'ensemble; par μ'_2 la moyenne

$$\frac{\sum_{h=1}^{h=N} (x_h - M)^2}{N}$$

c'est à dire, la fluctuation des éléments de l'ensemble primitif; par μ''_2 la moyenne

$$\frac{\sum_{h=1}^{h=n} (x_h - M_i)^2}{n}$$

rélative aux éléments d'un groupe, c'est à dire la fluctuation des éléments du groupe i.

Avec ces notations, l'égalité précédente prend la forme

$$n \sum_{i=1}^{\nu} \mu''_2 = n\,\nu\,\mu'_2 - n\,\nu\,\mu_2$$

d'où en divisant par $n\,\nu$

$$\frac{\sum_{i=1}^{\nu} \mu''_2}{\nu} = \mu'_2 - \mu_2$$

Si l'on désigne par μ'''_2 la moyenne des fluctuations μ_2'', on peut écrire finalement :

[1] $$\mu'''_2 = \mu'_2 - \mu_2 \text{ ou } \mu_2 = \mu'_2 - \mu'''_2$$

5. — Il s'agit maintenant d'établir entre μ'_2 et μ'''_2 une rélation, qui permette de calculer la fluctuation μ'_2 à l'aide d'une valeur observée de μ'''_2. Le théorème suivant marque un premier pas dans cette voie.

THÉORÈME IV. - *Le carré moyen des moyennes des groupes est la somme de deux termes dont l'un est le carré de la moyenne des éléments, l'autre la fluctuation de ces éléments divisée par leur nombre et multipliée par le rapport entre la différence des nombres d'élements contenus,*

soit dans l'ensemble, soit dans chaque groupe, et le nombre des éléments de l'ensemble moins un.

Le carré de la somme des éléments du groupe i, dont le nombre est n et la moyenne M_i est égal à $n^2 M^2_i$. Son expression est de la forme $(x_\alpha + x_\beta + \ldots\ldots)^2$. En developpant ce carré, on obtient une suite de termes que l'on peut représenter par $\sum_1^n x^2 + 2P$, P représentant la somme des produits deux à deux des éléments du groupe.

On peut donc écrire

$$n^2 M^2_i = \sum_1^n x^2 + 2P$$

et pour l'ensemble des groupes

$$[2] \qquad n^2 \sum_1^\nu M^2_i = \sum_1^\nu \sum_1^n x^2 + 2 \sum_1^\nu P$$

D'après le théorème II

$$\sum_1^\nu \sum_1^n x^2 = \frac{n\nu}{N} S_2 = n\nu(\mu'_2 + M^2)$$

car

$$S_2 = \Sigma(x - M^2) + N M^2 .$$

Pour déterminer $\sum_1^\nu P$, nous rappellerons que, parmi les $n\nu$ éléménts compris dans la totalité des groupes, $\frac{n\nu}{N}$ seulement sont différents Chacun, dans le groupe auquel il appartient, donne naissance à $n - 1$ produits. Il y a donc $\frac{n\nu}{N}(n-1)$ produits, dans lesquels un élément déterminé est associé à un autre élément, dans le même groupe. Mais, dans ces produits, le second élément se retrouve plusieurs fois car, dans l'ensemble primitif, un élément ne donne que $N - 1$ produits avec les autres : il n'y a donc que $N - 1$ produits différents. Par suite, parmi les

$$\frac{n\nu}{N}(n-1)$$

produits formés par un élément déterminé avec les autres, dans l'ensemble des groupes, $\frac{n\nu(n-1)}{N(N-1)}$ seulement sont différents.

Désignons par P' la somme des produits différents que l'on peut former dans l'ensemble primitif, ce nombre multiplié par le rapport précédent donne la somme des produits formés dans l'ensemble des

groupes. On a donc :

$$\sum_{1}^{\nu} P = \frac{n\nu(n-1)}{N(N-1)} P'$$

Mais

$$2P' = S_1^2 - S_2 = N^2 M^2 - N(\mu'_2 + M^2) = N[M^2(N-1) - \mu'_2]$$

Substituons les valeurs précédentes dans l'égalité [1], celle-ci devient

$$n^2 \sum_{1}^{\nu} M_i^2 = n\nu(\mu'_2 + M^2) + \frac{n\nu(n-1)}{N(N-1)} N[M^2(N-1) - \mu'_2]$$

ou en simplifiant

$$n^2 \sum_{1}^{\nu} M_i^2 = n^2 \nu M^2 + n\nu\mu'_2 \left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right)$$

$$= n^2 \nu M^2 + \frac{n\nu(N-n)}{N-1} \mu'_2$$

d'où

$$\frac{n^2 \sum_{1}^{\nu} M_i^2}{n\nu} = \mu'^2 \frac{N-n}{N-1} + n M^2$$

ou

$$\frac{\sum_{1}^{\nu} M_i^2}{\nu} = \frac{\mu'_2}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1} + M^2$$

6. — Le théorème précédent va permettre d'exprimer la fluctuation moyenne des éléments des groupes autour de leurs moyennes respectives, à l'aide de la fluctuation des éléments de l'ensemble primitif et inversement.

THÉORÈME V. — *Le rapport de la fluctuation moyenne des* n *éléments d'un groupe à la fluctuation des* N *éléments de l'ensemble primitif est égal au rapport de l'unité moins l'inverse du nombre* n *des éléments d'un groupe, à l'unité moins l'inverse du nombre* N *des éléments de l'ensemble.*

Reprenons l'égalité connue

$$\sum_{h=1}^{h=n} (x_h - M_i)^2 = \sum_{h=1}^{h=n} x_h^2 - n M_i^2$$

applicable au groupe i et formons la somme des égalités semblables

pour l'ensemble des groupes, il vient

$$\sum_{i=1}^{i=\nu}\sum_{h=1}^{h=n}(x_h - M_i)^2 = \sum_{i=1}^{i=\nu}\sum_{h=1}^{h=n} x_h{}^2 - n\sum_{i=1}^{i=\nu} M_i{}^2$$

D'après le théorème II

$$\sum_1^{\nu}\sum_1^{n} x^2 = \frac{n\,\nu}{N}\,S_2 = n\,\nu\,(\mu'_2 + M^2)$$

D'après le théorème IV

$$n\sum_1^{\nu} M_i{}^2 = \nu\,\mu'_2\,\frac{N-n}{N-1} + n\,\nu\,M^2$$

On peut donc écrire

$$\sum_1^{\nu}\sum_1^{n}(x - M_i)^2 = n\,\nu\,(\mu'_2 + M^2) - \nu\,\frac{N-n}{N-1}\,\mu'_2 - n\,\nu\,M^2$$

ou

$$\sum_1^{\nu}\sum_1^{n}(x - M_i)^2 = n\,\nu\,\mu'_2\left(1 - \frac{N-n}{N-1}\right) = \frac{n\,(n-1)\,\nu}{N-1}\,\mu'_2$$

Nous avons désigné (th. III) par μ_2''' la fluctuation moyenne

$$\frac{1}{\nu}\sum_1^{\nu}\frac{\Sigma\,(x - M_i)^2}{n}$$

Avec cette notation l'égalité précédente s'écrit

$$\mu'''_2 = \frac{n-1}{N-1}\,\mu'_2$$

d'où

$$\mu'_2 = \frac{N-1}{n-1}\,\mu'''_2$$

ou bien

$$\frac{\mu'''_2}{\mu'_2} = \frac{1 - \dfrac{1}{n}}{1 - \dfrac{1}{N}}\,.$$

Si n et N sont de grands nombres, la fluctuation moyenne μ'''_2 est à peu près égale à la fluctuation des éléments de l'ensemble primitif.

7. — On peut maintenant, en combinant les théorèmes III et V exprimer les fluctuations μ'_2 ou μ_2'''.

THÉORÈME VI. - *La fluctuation des moyennes des* n *éléments des différents groupes est égale à la* $n^{ième}$ *partie de la fluctuation des* N *éléments de l'ensemble, multipliée par le rapport de la différence entre les nombres d'éléments soit de l'ensemble, soit de chaque groupe, au nombre* N *des éléments de l'ensemble diminué d'une unité. Elle est aussi égale à la* $N^{ième}$ *partie de la fluctuation moyenne des groupes multipliée par le rapport de la différence des nombres d'éléments soit de l'ensemble, soit des groupes, au nombre* n *des éléments de chaque groupe diminué d'une unité.*

En effet, d'après le théorème III

$$\mu_2 = \mu'_2 - \mu'''_2$$

En conséquence, d'après le théorème V,

$$[3] \qquad \mu_2 = \mu'_2 \left[1 - \frac{N(n-1)}{n(N-1)}\right] = \frac{N-n}{n(N-1)}\mu'_2 = \frac{N-n}{N(n-1)}\mu'''_2$$

Remarques: 1) Lorsque n est assez grand et que N est un très grand nombre, l'égalité précédente se réduit à peu près à

$$\mu_2 = \frac{\mu'''_2}{n} = \frac{\mu'_2}{n}$$

Dans le cas d'un ensemble comprenant un nombre extrêmement grand d'éléments μ'_2 et μ'''_2 sont près égaux.

2) Si $N = n$, c'est à dire si l'ensemble ne comprend qu'un seul groupe identique à lui-même,

$$\mu'''_2 = \mu'_2 = \text{ et } \mu_2 = 0$$

comme on pouvait le prévoir.

3) Si $n = 1$, c'est à-dire s'il n'y avait point de groupes formés, chaque groupe se réduisant à l'un des éléments de l'ensemble, les formules précédentes donnent:

$$\mu_2 = \mu'_2 \quad \mu''_2 = \mu'''_2 = 0 \ ,$$

comme on pouvait également le prévoir.

4) Si, au lieu des groupes de n éléments, on considère des groupes de $N - n$ éléments, l'expression de μ_2 en fonction de μ'_2

$$\mu_2 = \frac{N-n}{n(N-1)}\mu'_2$$

se transforme en

$$\pi_2 = \frac{n}{(N-n)(N-1)}\mu'_2 \ .$$

Lorsque $n = 1$, cette expression donne

$$\pi_2 = \frac{\mu'_2}{(N-1)^2}$$

ainsi qu'il convient.

D'autre part, quand $n = N$, on a $\pi = 0$. Des deux expressions précédentes, on déduit:

$$\frac{\mu_2}{\pi_2} = \frac{(N-n)^2}{n^2} \quad \text{ou} \quad \frac{\sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\pi_2}} = \frac{N-n}{n}$$

En appellant groupe complémentaire, celui qui est formé par les éléments restants dans l'ensemble primitif, quand on a enlevé ceux d'un groupe, et en appelant écart type d'un groupe la racine carrée de la fluctuation, on peut dire que l'écart type d'un groupe et celui de son complément présentent un rapport inverse du rapport des nombres d'éléments composants (1).

Les grandeurs des éléments de l'ensemble primitif ont été supposées mesurées pour un certain caractère: par exemple, ce sont les tailles d'enfants de divers âges. On peut considérer les mêmes éléments sous le rapport d'un autre caractère lié au premier, par exemple l'âge des mêmes enfants.

D'une manière générale si, pour le second caractère, les grandeurs des éléments de l'ensemble primitif sont $x'_1, x'_2 \ldots x'_N$, — les grandeurs x_i , x'_i se correspondent comme applicables au même enfant —, supposons que chaque x soit lié à celui des x' qui lui correspond par une rélation linéaire de la forme

$$x_i = a\,x'_i + b$$

On sait que les moyenne des deux séries de grandeurs sont liées par la même rélation, ce qui n'est vrai que pour une rélation du premier degrè.

Supposons maintenant que l'on ait été à même d'observer la grandeur x' pour tous les éléments, alors qu'on n'a pu le faire pour la grandeur x. On a pu alors composer un groupe d'éléments tels que la moyenne des x' soit la même pour le groupe que pour l'ensemble des éléments. La rélation ci dessus permet d'obtenir la moyenne inconnue de l'ensemble des grandeurs x à l'aide de la moyenne déterminée pour le groupe.

Si la rélation n'est qu'approchée, au lieu d'être rigoureuse, les

(1) La question traitée dans les paragraphes ci dessus l'a été, sous une forme différente par M. Isserlis «Journal of the Royal Statistical Society», 1918, january, p. 75.

limites du champ de variation des x se déduisent de l'étude à laquelle il a été fait allusion dans le § 1.

8. — *Exemple*: Ensemble de 5 éléments 3-6-9-12-15 dans lesquels on puise 3 éléments pour former tous les groupes possibles de 3 éléments, un élément n'entrant qu'une fois dans chaque groupe.

On a : $N = 5$ $S_1 = 45$ $M = 9$ $S_2 = 495$ $\mu'_2 = 18$

$$n = 3 \quad \nu = 10 \quad \frac{n\nu}{N} = 6 \quad N^2 \mu'_2 = 450 = 2475 - 2025$$

$$P = 2295 \quad P' = \frac{1}{2}(45^2 - 495) = 765 \quad \mu'''_2 = 15 = \frac{2-1}{4} \times \frac{5}{3} \times 18$$

$$\mu_2 = \frac{5-3}{5(3-1)} \times 15 = \frac{5-3}{3 \times (5-1)} \times 18$$

9. — Les théorèmes précédents s'appliquent quand on ne connait, de l'ensemble étudié, que le nombre total des éléments. Lorsque, en outre, on dispose de données sur la composition, par espèces, de l'ensemble, par exemple, si l'on connait le nombre des ouvriers dont on étudie les salaires, non seulement dans l'ensemble de la région, mais encore dans des parties de la région, dans des districts ou même dans des établissements d'une certaine importance, on peut profiter de cette connaissance pour réduire la différence entre la moyenne approchée et la moyenne générale inconnue.

Dans ce cas l'échantillon dont on déduit la moyenne approchée peut être pris de deux façons, soit parmi les éléments indistinctement, en ayant soin toutefois de tenir compte de ceux qui appartiennent aux différentes espèces de l'ensemble, soit en prenant un certain nombre d'espèces, dont tous les éléments sont compris dans l'échantillon. Par exemple, si une région comprend 10.000 ouvriers répartis entre 200 établissements, on peut prendre un lot de 2.000 ouvriers répartis entre les 200 établissements ou bien prendre 40 établissements parmi les 200, tous les ouvriers de ces 40 établissements étant observés.

Nons considérerons d'abord le premier cas, dont la solution dépend des théorèmes suivants.

10. — Soit un ensemble de N éléments, divisé en N' espèces de N_x éléments x, N_y éléments y, N_z éléments z, etc. dont les sommes sont respectivement S_x, S_y, S_z, etc., les moyennes respectivement M_x, M_y, M_z, etc. $\left(M_x = \frac{S_x}{N_x}, \text{etc.}\right)$, de sorte que la somme des N

éléments est

$$S = S_x + S_y + S_z + \dots$$

et leur moyenne M' est

$$M' = \frac{N_x M_x + N_y M_y + N_z M_z + \dots}{N}$$

On prend n_x éléments x, n_y éléments y, etc., pour former un groupe qui contient

$$n = n_x + n_y + n_z + \dots$$

éléments. Soient ν_x le nombre des manières de puiser n_x éléments dans le groupe des x, ν_y le nombre analogue pour les y, etc. Le nombre des groupes, que l'on peut ainsi puiser dans les N éléments de l'ensemble est alors

$$\nu = \nu_x \times \nu_y \times \nu_z \times \dots$$

car les ν_x éléments x peuvent être associés à l'un quelconque des éléments y; à l'association de deux éléments x, y peut être joint l'un quelconque des éléments z, etc..

THÉORÈME VII. - *La moyenne des éléments, dans l'ensemble des groupes, est égale à la moyenne arithmétique pondérée des moyennes des groupes de l'ensemble primitif, la pondération étant donnée par les nombres d'éléments de différentes espèces qui entrent dans chaque groupe.*

En effet, dans un groupe quelconque, il entre n_x éléments x; comme il y a ν groupes, le nombre total des éléments x qui s'y trouvent est $\nu n x$. N_x seulement de ces éléments sont différents. Par suite, l'un quelconque d'entre eux entre $\frac{n_x \nu}{N_x}$ fois dans la totalité. De même un élément y entre $\frac{n_y \nu}{N_y}$ fois; etc..

De là résulte que la somme des N éléments qui figurent dans les groupes est

$$\nu \frac{n_x}{N_x} S_x + \nu \frac{n_y}{N_y} S_y + \nu \frac{n_z}{N_z} S_z + \dots$$

La valeur moyenne d'un élément est le quotient de cette somme par νn, nombre des éléments, soit

$$[4]\quad M = \frac{1}{n}\left[\frac{n_x}{N_x} S_x + \frac{n_y}{N_y} S_y + \dots\right] = \frac{1}{n}\left[n_x M_x + n_y M_y + n_z M_z + \dots\right].$$

En général, cette valeur diffère de la moyenne $M' = \frac{S}{N}$ des N éléments de l'ensemble primitif. Mais elle est identique à la moyenne

des moyennes des groupes, puisque ceux-ci comprennent le même nombre d'éléments de chaque espèce. Les éléments du groupe i ayant pour moyenne M_i, on a

$$\frac{\Sigma M_i}{\nu} = \frac{n \Sigma M_i}{n \nu},$$

$n \Sigma M_i$ étant la somme des valeurs des éléments dans le groupe i.

Les deux moyennes M et M' ne sont nécessairement égales que si le nombre n_{i_x} des éléments pris dans un groupe quelconque i est une fraction constante du nombre N_w des éléments de ce groupe. On a alors

$$\frac{n_x}{N_x} = \frac{n_y}{N_y} = \frac{n_w}{N_w} \cdots = \frac{n}{N}.$$

Dans ce cas, la valeur moyenne d'un élément dans l'ensemble des groupes est égale à la valeur moyenne d'un élément dans l'ensemble primitif.

12. — THÉORÈME VIII. - *Le rapport de la fluctuation moyenne des éléments d'une même espèce, qui entrent dans les divers groupes, à la fluctuation des éléments de cette espèce dans l'ensemble primitif, est égal au rapport de l'unité moins l'inverse du nombre des éléments de l'espèce dans le groupe à l'unité moins l'inverse du nombre des éléments de l'espèce dans l'ensemble primitif.*

Ce théorème est l'application à une espèce particulière, du théorème V, qui a été démontré pour un ensemble quelconque d'éléments.

Car les éléments d'une même espèce, qui figurent dans les ν groupes se trouvent associés comme les groupes que l'on peut prendre de toutes les manières possibles parmi les éléments de l'espèce considérée.

La seule différence est que le nombre des groupes ν_x, par exemple, pris parmi les x, doit être substitué au nombre ν du théorème V. Mais ce nombre n'intervient pas dans l'égalité finale, de sorte que l'on peut écrire, pour l'espèce x

$$\frac{\mu''_{2,x}}{\mu'_{2,x}} = \frac{1 - \frac{1}{n_x}}{1 - \frac{1}{N_x}}$$

ou

$$[5] \qquad \mu''_{2,x} = \frac{N_x (n_x - 1)}{n_x (N_x - 1)} \mu'_{2,x}$$

en désignant par $\mu'_{2,x}$ la fluctuation des éléments de l'espèce x dans

l'ensemble primitif, par $\mu'''_{2,x}$ la moyenne des fluctuations $\mu''_{2,x}$ des éléments de l'espèce x, qui entrent dans un groupe quelconque.

L'exemple donné plus loin (§ 14) permet de ser endre compte, d'une manière concrète de la formation des groupes.

Les éléments y, z, etc., donneraient lieu à des égalités analogues à l'égalité (5).

13. — Nous pouvons maintenant déterminer la fluctuation des moyennes des groupes. Cette fluctuation fera connaître, d'une manière génerale, l'écart entre la moyenne calculée d'après un groupe quelconque et la moyenne, supposée inconnue, de l'ensemble primitif.

Théorème IX. - *La fluctuation des moyennes des éléments des divers groupes est égale à une moyenne arithmétique pondérée des fluctuations moyennes des éléments des diverses espèces dans les groupes. La pondération depend essentiellement du nombre rélatif des éléments de chaque espèce dans chaque groupe et de la différence des inverses des nombres d'éléments de chaque espèce dans l'ensemble primitif et dans chaque groupe.*

Dans un groupe quelconque de rang i, dont les éléments ont pour moyennes: $M_{i,x}$, moyenne des éléments de l'espèce x, $M_{i,y}$, moyenne des éléments de l'espèce y, etc., M_i étant la moyenne de tous les éléments du groupe on constate que

$$M_i = \frac{n_x M_{i,x} + n_y M_{i,y} + n_z M_{i,z} + \dots}{n}.$$

D'où

$$[6] \quad \left\{ \begin{array}{l} n^2 M_i^2 = (n_x M_{i,x} + n_y M_{i,y} + \dots)^2 \\ \qquad = n_x^2 M_{i,x}^2 + n_y^2 M_{i,y}^2 + \dots \\ \qquad\qquad + 2 [n_x n_y M_{i,x} M_{i,y} + n_x n_z M_{i,x} M_{i,z} + \dots] \end{array} \right.$$

Pour l'ensemble des groupes on obtient, dans le second membre, d'abord une somme de carrés, tels que

$$\sum_1^{\nu} n_x^2 M^2_{i,x} = n^2_x \sum_1^{\nu} M^2_{i,x}.$$

Or, en vertu du théorème IV, on pourrait remplacer $n^2_x \sum_1^{x} M^2_{i,x}$ par

$$\frac{n_x \nu_x (N_x - n_x)}{N_x - 1} \mu'_{2,x} + \nu_x n_x^2 M_x^2$$

s'il n' y avait que ν_x groupes. Comme il y en a ν, la somme précé-

dente doit être multipliée par $\frac{\nu}{\nu_x}$, ce qui donne

$$n_x \nu \frac{N_x - n_x}{N_x - 1} \mu'_{2,x} + \nu n_x^2 M_x^2$$

et de même pour les éléments y, z, etc.

Quant au produit $n_x n_y M_x M_y$, c'est le produit de la somme des éléments x, soit $n_x M_x$, par la somme des éléments y, soit $n_y M_y$, qui entrent dans un groupe. La somme des produits analogues pour l'ensemble des groupes, est la somme de tous les produits que l'on peut former, *à l'intérieur de chaque groupe*, avec un élément x et un élément y. Or, ces produits sont loin d'être tous différents. Un élément particulier de l'ensemble primitif entre dans $\frac{n_x \nu_x}{N_x}$ produits formés dans l'ensemble des groupes. Cet élément, associé avec un des éléments y du groupe auquel il appartient, donne n_y produits. Il en résulte que, dans l'ensemble des groupes, cet élément x particulier entre dans $\frac{n_x \nu_x}{N_x} n_y$ produits. Or N_y éléments y, seulement, sont différents; donc le nombre des produits d'un x déterminé par un y détérminé sera le quotient par N_y du nombre précédent, soit $\frac{\nu_x n_x n_y}{N_x N_y}$. De même, pour les produits des éléments x avec les éléments z, des éléments y avec les éléments z, etc. Au total, si nous désignons pas $P'_{x,y}$, $P'_{y,z}$, $P'_{y,z}$, etc, les sommes des produits que l'on peut former dans l'ensemble primitif en associant deux éléments de groupes différents, et par $P_{x,y}$ $P_{x,z}$ etc., les sommes analogues formées, dans chacun des groupes, avec des éléments d'espèces différentes, on pourra écrire

$$P_{x,y} + P_{x,z} + P_{y,z} + \ldots = \nu \left[\frac{n_x}{N_x} \cdot \frac{n_y}{N_y} P'_{x,y} + \right.$$

$$\left. + \frac{n_x}{N_x} \cdot \frac{n_z}{N_z} P'_{x,z} + \frac{n_y}{N_y} \cdot \frac{n_z}{N_z} P'_{y,z} + \ldots \right].$$

Or, la somme des produits désignés par $P_{x,y}$ est égale au produit des deux sommes d'éléments S_x, S_y ou au produit $n_x n_y M_x M_y$ et de même pour les autres sommes.

Dans le total, applicable à tous les groupes, des égalités telles que l'égalité (6), substituons, tant à la somme des carrés qu'aux doubles produits, les expressions que nous venons d'obtenir et nous pourrons écrire

$$n^2 \sum_1^{\nu} M_i^2 = \left| \begin{array}{l} n_x \nu \dfrac{N_x - n_x}{N_x - 1} \mu'_{2,x} + n_x^2 M_x^2 + \\ + n_y \nu \dfrac{N_y - n_y}{N_y - 1} \mu'_{2,y} + n_y^2 M_y^2 \\ + \ldots\ldots \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} 2 \nu n_x n_y M_x M_y \\ + 2 \nu n_x n_z M_x M_z \\ + 2 \nu n_y n_z M_y M_z \\ + \ldots\ldots \end{array} \right.$$

ou bien en réunissant les termes contenant $n_x M_x$, $n_y M_y$, etc.

$$n^2 \sum_1^{\nu} M_i^2 = n_x^2 \frac{N_x - n_x}{n_x (N_x - 1)} \mu'_{2,x} + \frac{n_y^2}{n^2} \frac{N_y - n_y}{n_y (N_y - 1)} \mu'_{2,y} + \ldots + \\ + (n_x M_x + n_y M_y + \ldots)^2$$

Divisant les deux membres par $n^2 \nu$, il vient finalement

$$[7] \quad \frac{1}{\nu} \sum_1^{\nu} M_i^2 = \frac{n_x}{n^2} \frac{N_x - n_x}{N_x - 1} \mu'_{2,x} + \frac{n_y}{n^2} \frac{N_y - n_y}{N_y - 1} \mu'_{2,y} + \ldots + M^2 .$$

Et, comme la fluctuation cherchée $\mu_2 = \dfrac{\sum (M_i - M)^2}{\nu}$ est égale à $\dfrac{\sum M_i^2}{\nu} - M^2$, il en résulte que

$$[8] \quad \mu_2 = \frac{n_x}{n^2} \cdot \frac{N_x - n_x}{N_x - 1} \mu'_{2,x} + \frac{n_y}{n^2} \cdot \frac{N_y - n_y}{N_y - 1} \mu'_{2,y} + \ldots$$

En fait $\mu'_{2,x}$, $\mu'_{2,y}$ sont inconnus, mais l'égalité [3] du § 7 permet de remplacer, les μ' par les μ''', de sorte que

$$\frac{n_x (N_x - n_x)}{n^2 (N_x - 1)} \mu'_2 = \frac{n_x (N_x - n_x)}{n^2 (N_x - 1)} \times \frac{n_x (N_x - 1)}{N_x (n_x - 1)} \mu'''_{2,x} = \\ = \left(\frac{n_x}{n}\right)^2 \frac{N_x - n_x}{(n_x - 1) N_x} \mu'''_{2,x}$$

L'expression de μ_2 prend la forme

$$[9] \quad \mu_2 = \left(\frac{n_x}{n}\right)^2 \frac{N_x - n_x}{N_x (n_x - 1)} \mu'''_{2,x} + \left(\frac{n_y}{n}\right)^2 \frac{N_y - n_y}{N_y (n_y - 1)} \mu'''_{2,y} + \\ + \left(\frac{n_z}{n}\right)^2 \frac{N_z - n_z}{N_z (n_z - 1)} \mu'''_{2,z} + \ldots$$

La moyenne μ_2''' des fluctuations μ'' des éléments de chaque espèce dans les divers groupes n'est pas connue. L'épreuve qui a formé un groupe ou échantillon permet d'en calculer la valeur approchée fournie par l'expérience.

Remarques. — 1. Les théorèmes précédents font connaître, d'une manière générale, les écarts entre la moyenne d'un groupe et la moyenne applicable à l'ensemble des groupes. Comme on l'a dit plus haut, cette dernière moyenne diffère, en général, de la moyenne M' de l'ensemble primitif. Or, pour une moyenne de groupe, telle que M_i, on a

$$\frac{\Sigma (M_i - M)^2}{\nu} = \frac{\Sigma (M_i - M')^2}{\nu} - (M' - M)^2.$$

La différence des deux carrés moyens est donc égale à

$$\left(\frac{N_x M_x + N_y M_y + \dots}{N} - \frac{n_x M_x + n_y M_y + \dots}{n}\right)^2 =$$

$$= \left[M_x\left(\frac{N_x}{N} - \frac{n_x}{n}\right) + M_y\left(\frac{N_y}{N} - \frac{n_y}{n}\right) + \dots\right]^2$$

Elle est d'autant plus faible, que le nombre rélatif des éléments puisés dans chaque espèce diffère moins du nombre rélatif des éléments de cette espèce dans l'ensemble primitif.

2. Les théorèmes I à V sont fondés sur la symétrie de la formation des groupes ou échantillons, que l'on peut puiser dans l'ensemble primitif et par conséquent sur l'égalité des nombres d'éléments ainsi puisés. Si les nombres étaient inégaux, les propositions et formules ne s'appliqueraient plus.

14. — *Exemple.* Soit la suite de 9 nombres

$$\underbrace{12 - 24 - 48 - 60}_{x} \quad , \quad \underbrace{36 - 84 - 96}_{y} \quad , \quad \underbrace{72 - 120}_{z}$$

répartis en 3 espèces: x, y, z.

On a:

$N_x = 4$ $N_y = 3$ $N_z = 2$ $N = 9$

$M_x = 36$ $M_y = 72$ $M_z = 96$ $M^2{}_x = 1296$ $M^2{}_y = 5184$ $M^2{}_z = 9216$

$S_x = 144$ $S_y = 216$ $S_z = 192$ $S = 552$ $M' = \frac{552}{9} = 61\frac{1}{3}$

$S_{2,x} = 6624$ $S_{2,y} = 17568$ $S_{2,z} = 19584$ $S_2 = 33816$

$$\mu'_{2,x} = 360 \quad \mu'_{2,y} = 672 \quad \mu'_{2,z} = 576$$

On forme tous les groupes de 6 éléments, composés de 3 éléments x, 2 éléments y, 1 élément z

$$n_x = 3,\ n_y = 2,\ n_z = 1, \quad \nu_x = 4,\ \nu_y = 3,\ \nu_z = 2,\ \nu = 24$$

Les groupes étant formés et les moyennes de leurs éléments, on trouve

$$\frac{\Sigma M_{i,x}}{n_x} = 144 \quad \frac{\Sigma M_{i,y}}{n_y} = 216 \quad \frac{\Sigma M_{i,z}}{n_z} 192 \text{ d'où } M = 58$$

Puis

$$\mu'''_{2,x} = 320 \quad \mu'''_{2,y} = 504 \quad \mu'''_{2,z} = 0 \quad \mu'' = 44\frac{2}{3}$$

$$\mu_2 = \frac{1}{4} \times \frac{4-3}{4 \times 2} \times 320 + \frac{3-2}{3(2-1)} 504 + \frac{1}{36} + 576\,(1) = 44\frac{2}{3}$$

15. — Les théorèmes précédents permettent d'évaluer la moyenne d'un ensemble d'éléments d'après un échantillon prélevé dans cet ensemble. En fait, ils présentent deux procédés différents suivant que l'ensemble n'est pas décomposé ou bien se trouve décomposé en espèces différentes dont l'importance est connue. Dès lors, il y a lieu de comparer ces deux procédés, pour voir celui qui donne les moindres écarts entre la moyenne de l'ensemble, laquelle est supposée inconnue, et les moyennes des groupes, dont l'un constitue l'échantillon.

A cet effet, la fluctuation moyenne des groupes ayant été calculée à l'aide de la formule [8] du théorème IX, calculons-la en supposant que les éléments de l'ensemble ne soient pas répartis par espèces. On applique alors la formule [3] du théorème VI dans laquelle on peut remplacer

$$N \text{ par } N_x + N_y + \ldots$$
$$n \text{ par } n_x + n_y + \ldots$$

Cette formule donne ainsi

$$\mu_2 = \frac{(N_x + N_y + \ldots) - (n_x + n_y + \ldots)}{(n_x + n_y + \ldots)(N_x + N_y + \ldots - 1)} \mu_2'.$$

Pour calculer μ'_2 en fonction de $\mu'_{2,x}$, $\mu'_{2,y}$, ... désignons par ω l'un quelconque des x, y, z, ... et écrivons l'identité

$$\sum_1^N (\omega - M)^2 = \sum_1^{N_x} (x - M)^2 + \sum_1^{N_y} (y - M)^2 + \ldots$$

ou

$$\sum_1^N (\omega - M)^2 = \sum_1^{N_x} (x - M_x)^2 + N_x (M_x - M)^2 + \sum_1^{N_y} (y - M_y)^2 + N_y (M_y - M)^2 + \ldots$$

(1) $\mu'''_{2,z}$ étant nul parce que $n = 1$, $\mu'''_{2,z}$ doit être remplacé par $\mu'_{2,z}$ affecté de son coefficient.

laquelle s'écrit aussi

$$N\,\mu'_2 = N_x\,\mu'_{2,x} + N_y\,\mu'_{2,y} + \ldots + \\ + n_x\,(M_x - M)^2 + n_y\,(M_y - M)^2 + \ldots$$

D'où en substituant :

$$[10] \qquad \mu_2^{(E)} = \frac{N-n}{n\,(N-1)}\left[\frac{N_x}{N}\,\mu'_{2,x} + \frac{N_y}{N}\,\mu'_{2,y} + \ldots\right] + \\ + \frac{N-n}{n\,(N-1)}\left[\frac{n_x}{N}\,(M_x - M)^2 + \frac{n_y}{N}\,(M_y - M)^2 + \ldots\right]$$

Pour comparer cette valeur de μ_2 à celle que donne la formule [84] dont l'expression est

$$[11] \quad \mu_2^{(G)} = \frac{n_x}{n^2}\cdot\frac{N_x - n_x}{N_x - 1}\,\mu'_{2,x} + \frac{n_y}{n^2}\cdot\frac{N_y - n_y}{N_y - 1}\,\mu'_{2,y} + \ldots$$

comparons d'abord les coefficients de $\mu'_{2,x}$ en prenant leur rapport. Nous admettons, pour simplifier, que N et N_x sont assez grands pour qu'ils puissent remplacer sans erreur appréciable $N - 1$ et $N_x - 1$. Le rapport du coefficient compris dans l'égalité [10] au coefficient de l'égalité [11] est alors

$$\frac{(N-n)\,N_x}{n\,N^2} \times \frac{n^2\,N_x}{n_x\,(N_x - n_x)}\,.$$

Posons

$$\frac{n_x}{N_x} = K\,\frac{n}{N}\,,\quad \frac{n}{N} = \alpha$$

le rapport devient, en divisant ses deux termes par $N\,N_x$,

$$\frac{(1-\alpha)}{K\,(1 - K\,\alpha)}$$

Ce rapport est généralement peu différent de l'unité si K est lui-même voisin de s.

De plus, la première expression [10] comprend la somme des carrés

$$n_x\,(M_x - M)^2 + n_y\,(M_y - M)^2 + \ldots$$

dont la valeur est souvent beaucoup plus considérable que celle des termes en $\mu'_{2,x}$, $\mu'_{2,y}$, etc. La valeur de μ_2 résultant de la considération des espèces est donc, dans la pratique, toujours plus faible que la valeur calculée sans cette considération. La différence est d'autant plus grande que la somme des carrés ci dessus est plus grande, c'est à dire que les moyennes partielles diffèrent plus de la moyenne générale.

16. — *Cas particuliers* : 1. Lorsque, dans chaque espèce de l'ensemble primitif, la moyenne des éléments de l'espèce est égale à la moyenne de l'ensemble, les deux valeurs de μ_2 ne dépendent que des expressions de $\mu'_{2,x}$ $\mu'_{2,y}$, etc., et ne sont plus très différentes. Dans ce cas, la moyenne des éléments des groupes est aussi presque égale à la moyenne de l'ensemble.

Supposons que les moyennes partielles soient dans un même rapport avec la moyenne générale, c'est à dire que

$$\frac{M_x}{M} = \frac{M_y}{M} = \ldots = R$$

alors la somme des carrés de l'expression (14) devient

$$\frac{N-n}{n\,N\,(N-1)}\,M^2\,(1-R)^2\,(n_x + n_y + \ldots) = \frac{N-n}{n\,(N-1)}\,M^2\,(1-R)^2.$$

Elle est d'autant plus grande que R est plus voisin de 1.

2. Les éléments des groupes ont même fluctuation. Dans ce cas l'espression de μ_2 est

$$\mu_2 = \frac{1}{n^2}\,\mu'_{2,x}\left[\frac{N_x - n_x}{N_x - 1} + \frac{N_y - n_y}{N_y - 1} + \ldots\right].$$

Et d'après l'égalité (10) $\mu'_{2,x}$ s'exprime à l'aide de μ'_2, on a

$$N\,\mu'_{2,x} = N\,\mu'_2 - \Sigma\, n_w\,(M_w - M)^2.$$

Si, en outre, la moyenne des différentes espèces sont identiques à la moyenne de l'ensemble qui, dans ce cas, est aussi la moyenne M des éléments des groupes, alors le second membre de l'égalité est nul et la fluctuation commune $\mu'_{2,x}$ est égale à la fluctuation de l'ensemble. On a donc dans ce cas

$$\mu_2 = \frac{1}{n^2}\,\mu'_2\left[\frac{N_x - n_x}{N_x - 1} + \frac{N_y - n_y}{N_y - 1} + \ldots\right].$$

3. Les groupes se forment en prenant dans toutes les espèces, une même fraction des éléments. On suppose ainsi

$$\frac{n_x}{N_x} = \frac{n_y}{N_y} = \ldots = \frac{n}{N}$$

Dans l'expression de μ_2, égalité (8) du theorème IX, le coefficient de $\mu'_{2,x}$ peut s'écrire $\frac{N_x^{\,2}\,(N-n)}{n\,N^2\,(N_x-1)}$. Dans cette expression on peut presque toujours remplacer $N_x - 1$ par N_x ; la valeur approchée du coefficient est alors $\frac{(N-n)\,N_x}{n\,N^2}$ et de même pour les autres

coefficients, de sorte que l'on a sensiblement

$$\mu_2 = \frac{N-n}{n\,N}\left[\frac{N_x}{N}\,\mu'_{2,x} + \frac{N_y}{N}\,\mu'_{2,y} + \dots\right].$$

Or, d'après l'égalité (10) du paragraphe précédent, la somme entre parenthèses peut être remplacée par

$$N\,\mu'_2 - [n_x(M_x - M)^2 + n_y(M_y - M)^2 + \dots].$$

On peut donc écrire

$$\mu_2 = \frac{N-n}{n\,N}\,\mu'_2 - \frac{N-n}{n\,N}\left[\frac{n_x}{N}(M_x - M)^2 + \frac{n_y}{N}(M_y - M)^2 + \dots\right]$$

où μ'_2 peut se remplacer par μ'''_2.

Si les moyennes des groupes sont égales à la moyenne M, ou bien à cette moyenne multipliée par un coefficient K, l'expression devient

$$\mu_2 = \frac{N-n}{n\,N}[\mu'_2 + M^2(1 - K^2)],$$

le coefficient de M^2 étant nul si $k = 1$.

17. — Nous passerons maintenant au second cas prévu au § 9 Ce cas important se présente quand chaque groupe, au lieu d'être composé d'éléments appartenant aux différentes espèces, est formé en prenant *tous* les éléments d'un certain nombre d'espèces (1).

D'après cette formation, chacun des groupes possibles composés d'un même nombre d'espèces, contient des nombres variables d'éléments ; les groupes contiennent le même nombre d'éspèces mais non le même nombre d'éléments. Or ce sont les éléments qui doivent être compris dans le calcul des moyennes et des fluctuations.

Ainsi, dans l'exemple du § 14, les éléments

x : 12 — 24 — 48 — 60	donnent pour somme	144
y : 36 — 84 — 96		216
z : 72 — 120		192

Si l'on forme avec ces trois sommes les groupes possibles de deux :

$$144 - 216 \quad ; \quad 144 - 192 \quad ; \quad 216 - 192$$

---

(1) Ce cas, comme les précédents, a été traité par d'autres voies, par M. Bowley dans l'étude qu'il a présentée en 1925 à l'Institut international de statistique, comme annexe au rapport de M. Jensen sur « la méthode représentative ».

chaque somme, décomposée en ses éléments, donne les groupes,

$$\begin{array}{lll} 12-24-48-60 & - & 36-84-96 \\ 12-24-48-60 & - & 72-120 \\ 36-84-96 & - & 72-120 \end{array}$$

qui comprennent des nombres différents d'éléments. D'une manière générale, désignons par N' le nombre des sommes S_x, S_y, S_z, etc. d'éléments de différentes espèces, dont l'ensemble est composé, la moyenne de ces sommes est

$$\frac{S_x + S_y + \dots}{N'} = \frac{S_1}{N'} = m'$$

Soit n' le nombre des sommes qui composent chaque groupe ; le nombre total des sommes qui entrent dans tous les groupes possibles est $\nu' n'$, ν' étant le nombre des groupes ; N' sommes seulement sont différentes; une même somme entre $\frac{n'\nu'}{N'}$ fois dans l'ensemble des groupes.

Quant aux éléments, tous ceux d'une même somme entrent en même temps. Soit n_l le nombre des éléments d'un groupe ; cette fois

$$n_l = N_x + N_y + \dots$$

N_x N_y, etc. étant toujours les nombres d'éléments des différentes espèces dans l'ensemble primitif le nombre des espèces qui entrent dans le total est inférieur au nombre N' des espèces de l'ensemble primitif. La moyenne M de tous les éléments qui figurent dans les ν' groupes est

$$M = \frac{n_1 M_1 + \dots + n_l M_l + \dots + N_{\nu'} M_{\nu'}}{n_1 + n_2 + \dots + n_l + \dots + n_{\nu'}} =$$

$$= \frac{\frac{n'\nu'}{N'}(N_x M_x + N_y M_y \dots)}{\frac{n'\nu'}{N'} + N} = \frac{S_1}{N}$$

Cette fois, la moyenne de tous les éléments qui entrent dans la totalité des groupes est identique à la moyenne des éléments de l'ensemble. Mais M n'est plus égale à la moyenne arithmétique des moyennes des groupes: c'est une moyenne arithmétique pondérée de ces moyennes.

Comme les éléments des différentes espèces ne figurent plus dans tous les groupes, on ne peut plus déterminer le carré moyen des

écarts entre les moyennes des groupes et la moyenne génerale, bien que l'on connaisse les fluctuation des éléments de chaque espèce et à la rigueur les fluctuation des groupes, parce que la composition des groupes peut varier considérablement d'un groupe à l'autre.

18. — Considérons cependant le cas particulier d'un ensemble d'espèces dont les éléments sont également nombreux. Alors les groupes formés d'un même nombre d'espèces comprennent aussi le même nombre d'éléments et l'on revient au cas qui a été considéré tout d'abord, § 2, les éléments x étant simplement remplacés pas M_x, M_y, etc.

La fluctuation μ_2 dépend alors de la fluctuation des moyennes $M_x\, M_y \ldots$ dans les différents groupes ou bien de la fluctuation de ces moyennes dans l'ensemble primitif

Cette dernière est :

$$\frac{1}{N'}\left[(M_x - M)^2 + (M_y - M)^2 + \ldots\right]$$

Or

$$\frac{(M_x - M)^2}{N'} = \frac{\Sigma\,(x - M)^2 - \Sigma\,(x - M_x)^2}{N'\,N_x}$$

et l'on a $N'\,N_x = N$. Désignons par $\mu'_{2,\,M}$ la fluctuation des moyennes des différentes espèces dans l'ensemble primitif, on peut écrire, d'après l'égalité précédente :

$$\mu'_{2,\,M} = \mu'_2 - \frac{1}{N'}\,(\mu'_{2,x} + \mu'_{2,y} + \ldots)$$

D'autre part, en vertu de l'égalité (3) du § 7,

$$\mu_2 = \mu'_{2,\,M} \times \frac{N' - n'}{n'\,(N' - 1)}$$

On a finalement

$$\mu_2 = \frac{N' - n'}{n'\,(N' - 1)}\left[\mu'_2 - \frac{1}{N'}\,(\mu'_{2,\,x} + \mu'_{2,\,y} + \ldots)\right]$$

la parenthèse comprenant les fluctuations de toutes les espèces qui figurent dans l'ensemble primitif.

Si les espèces qui entrent dans un groupe particulier observé sont assez nombreuses, on peut calculer la fluctuation moyenne

$$\frac{1}{n'}\,(\mu'_{2,x} + \mu'_{2,y} \ldots)$$

pour les espèces qui s'y rencontrent, et une valeur approchée de la

fluctuation μ'''_2 qui se confond presque avec μ'_2 comme on l'a remarqué au § 7.

D'après l'expression ci dessus, le carré moyen des écarts des moyennes des groupes à partir de leur moyenne est d'autant plus faible que, d'une part le nombre des espèces groupées se rapproche davantage de leur nombre total dans l'ensemble primitif, et d'autre part que la fluctuation des éléments de l'ensemble diffère moins de la fluctuation moyenne des différentes espèces.

19. — Supposons maintenant que les nombres d'éléments des diverses espèces soient inégaux mais que les éléments aient même moyenne, quelle que soit l'espèce. Cette valeur commune est identique à la moyenne générale de tous les éléments ; il suffit par conséquent d'observer une seule de ces moyennes.

En fait on ne les connait pas toutes et l'on ne peut savoir si elles sont égales. Cependant il se peut que l'on connaisse la grandeur d'un ou de plusieurs caractères pour tous les éléments de l'ensemble étudié et que la valeur des éléments, pour l'objet de l'étude, résulte de cette connaissance. On est alors ramené au cas considéré au § 7, remarque 4.

20. — *Exemples*: 1. Soient les éléments suivants groupés par espèces de 3 éléments chacune

$$2-3-7\,;\ 1-5-9\,;\ 4-6-8\,;\ 7-9-11 \text{ où } N'=4\,;\ M'=6$$

$$M_x=4 \quad M_y=5 \quad M_z=6 \quad M_u=9$$

$$\mu'_{2,x}=\frac{14}{3} \quad \mu'_{2,y}=\frac{32}{3} \quad \mu'_{2,z}=\frac{8}{3} \quad \mu'_{2,u}=\frac{8}{3} \quad \frac{1}{N'}\Sigma\,\mu'_{2,x}=\frac{62}{12}$$

$$\mu'_2=\frac{26}{3}$$

En formant tous les groupes de 3 espèces (4 groupes) on trouve comme fluctuation des moyennes: 5, 6, $\frac{19}{3}$, $\frac{25}{3}$, des éléments de ces groupes: $\mu_2=\frac{18}{7}$

D'autre part $\mu'_2-\frac{1}{N'}\mu'_{2,x}=\frac{26}{3}-\frac{62}{12}=\frac{42}{12}$ et l'on peut vérifier que $\mu'_{2,M}=\frac{7}{2}$.

D'après la formule (3) du § 7, on doit avoir

$$\mu_2 = \frac{7}{18} - \frac{N' - N'}{N'(N'-1)}\,\mu'_{2,M} = \frac{1}{3 \times 3} \times \frac{7}{2} = \frac{7}{18}$$

2. Supposons que, pour deux caractères, les grandeurs des éléments des différentes espèces soient :

pour l'un x' : 1 — 2 — 6 — 7 — 9 ; 3 — 4 — 5 — 8 ;
2 — 6 — 7 ; 1 — 9 moyenne commune 5

pour l'autre x'' ; 3 — 4 ; 5 — 10 ; 2 — 5 — 7 — 10 ;
3 — 7 — 8 ; 4 — 8 moyenne commune 6

et que la grandeur étudiée x de chaque élément soit donnée par

$$x = 2\,x' + 3\,x'' + 5$$

En considérant seulement les éléments de la première espèce, la formule

$$M_x = 2\,M_{x'} + 3\,M_{x''} + 5$$

donne

$$M_x = 2 \times 5 + 3 \times 6 + 5 = 33$$

ce qu'il est facile de vérifier.

2e Partie · Association de séries primaires

1. — Dans le chapitre précédent, nous avons considéré des groupes formés en puisant des éléments également nombreux dans un ensemble déterminé. Et nous avons utilisé la somme des éléments de chaque groupe, les moyennes des grandeurs de ces éléments etc. L'ensemble d'où sont extraits les groupes est le réservoir *primaire* d'où sont extraits les groupes *secondaires* ; nous appelerons *termes secondaires* les sommes des éléments des différents groupes, *moyennes secondaires* les quotients des termes par le nombre des éléments de chaque groupe, fluctuations secondaires la fluctuation des éléments de chaque terme secondaire, etc, par opposition à la *moyenne primaire*, à la *fluctuation primaire* de l'ensemble primitif.

Les termes secondaires se différencient, eu égard aux grandeurs différentes des éléments qui les composent, et de même pour les moyennes secondaires. D'ailleurs, quand on a puisé dans l'ensemble primaire un certain nombre des éléments d'un terme secondaire, les éléments restants de ce terme ne peuvent être pris que parmi les autres éléments de l'ensemble primaire. Ainsi le choix des éléments d'un terme n'est pas entièrement libre à tout moment. Il est limité précisément par le contenu de l'ensemble primaire.

Nous étudierons maintenant une formation analogue de termes secondaires, ces termes étant composés d'éléments pris, non plus dans un ensemble unique, mais dans un certain nombre d'ensembles. Les éléments de ces ensembles sont supposés ordonnés ; ils se présentent sous la forme de n séries d'éléments, dont l'ordre est indiqué par des indices, ainsi qu'il suit

$1^{\text{ère}}$ série $x_{1,1}, x_{2,1}, \ldots, x_{i,1}, \ldots, x_{n_1,1}$ dont la moyenne est m_1
$2^{\text{ème}}$ » $x_{1,2}, x_{2,2}, \ldots, x_{i,2}, \ldots, x_{n_2,2}$ » m_2
. . . . . .
$h^{\text{ième}}$ » $x_{1,h}, x_{2,h}, \ldots, x_{i,h}, \ldots, x_{n\,n,h}$ » m_h
. . . . . .
$n^{\text{ième}}$ » $x_{1,n}, x_{2,n}, \ldots, x_{i,n}, \ldots, x_{n\,n,n}$ » m_n

Ces séries primaires étant données, on forme une série de termes secondaires en prenant un élément dans chaque série primaire, de toutes les manières possibles. Supposons, par exemple, que l'on observe le gain des ouvriers d'une équipe, pendant un certain temps, divisé en intervalles égaux. Les gains des différents ouvriers pendant un intervalle composent une série primaire. Le gain total d'un ouvrier, pendant n intervalles, s'obtient en totalisant les salaires gagnés par l'ouvrier durant les n intervalles successifs. On obtiendra d'ailleurs autant de totaux que l'on peut former de sommes en prenant un chiffre dans chaque intervalle c'est à dire dans chaque série primaire.

Par exemple, pour l'un des ouvriers dont le rang est désigné par la lettre i, ce sera la somme

$$x_{i,1} + x_{i,2} + \ldots + x_{i,h} + \ldots x_{i,n}$$

somme que nous appellons un terme seccondaire de rang i, étant entendu que cette lettre i désigne une place quelconque dans chacune des séries primaires.

Ces n grandeurs ont une moyenne (salaire gagné par intervalle de temps), que nous appelons moyenne secondaire et que nous représenterons par M_i .

2. — Si le mode de formation des termes secondaires est entièrement libre, en ce sens que le fait d'avoir choisi un terme d'une série primaire n'influe pas sur le choix des termes des autres séries, on peut former autant de termes secondaires, tels que celui-ci-dessus, qu'il y a de façons de prendre un élément dans chaque série primaire.

Il y a donc $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_n = \nu$ termes secondaires possibles.

Théorème I. - *La moyenne des moyennes secondaires est égale à la moyenne arithmétique des moyennes primaires.*

Désignons par M la moyenne des moyennes secondaires telles que M_i. Toutes ces moyennes secondaires étant composeés du même nombre de grandeurs n, on a:

$$\sum_1^{\nu} n\, M_i = \nu\, n\, M \text{ ou } \sum_1^{\nu} M_i = \nu\, M .$$

Or

$$n\, M_i = x_{i,1} + x_{i,2} + \ldots + x_{i,h} + \ldots + x_{i,n} .$$

En formant toutes les sommes semblables et puisqu'un élément d'une série peut être associé à n-1 éléments quelconques des n-1 autres séries

$x_{i,1}$ s'introduit $n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_n = \dfrac{\nu}{n_1}$ fois ,

$x_{i,2}$ » $n_1 \times n_3 \times \ldots \times n_n = \dfrac{\nu}{n_2}$ fois ,

et, ainsi de suite.

On peut donc écrire

$$\sum_1^{\nu} n\, M_i = \nu \left[\frac{x_{i,1}}{n_1} + \frac{x_{i,2}}{n_2} + \ldots + \frac{x_{i,h}}{n_h} + \ldots - \frac{x_{i,n}}{n_n} \right] .$$

et, $\sum_1^{\nu} n\, M_i = \nu\, n\, M$. En conséquence:

$$n\, M = \Sigma \left[\frac{x_{i,1}}{n_1} + \frac{x_{i,2}}{n_2} + \ldots + \frac{x_{i,h}}{n_h} + \ldots + \frac{x_{i,n}}{n_n} \right]$$

Mais

$$\frac{\Sigma\, x_{i,1}}{n_1} = m_1 , \quad \frac{\Sigma\, x_{i,2}}{n_2} = m_2, \ldots ,$$

donc

$$M = \frac{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}{n} .$$

M, moyenne des moyennes secondaires, est donc identique à la moyenne arithmétique des moyennes primaires, toutes celles-ci entrant avec le même poids, ce qui différencie en général M de la moyenne statistique calculée sur l'ensemble des éléments des séries primaires.

COROLLAIRE 1. - *Si toutes les séries primaires sont composées du même nombre de termes, la moyenne* M *se confond avec la moyenne générale des termes de ces séries.*

On peut alors énoncer l'égalité précédente sous la forme que voici: Dans le développement des séries primaires, comprenant toutes

le même nombre de termes, en séries secondaires, la moyenne se conserve. Cette propriété est une conséquence de la symétrie du mode de formation des séries secondaires.

Si l'on suppose de plus que les séries primaires successives du groupe ont même moyenne M, alors $M = m$; dans ce cas:

COROLLAIRE 2. - *La moyenne des termes de la série secondaire est égale à la moyenne commune des séries primaires.*

Exemple: Soit le groupe des séries primaires des grandeurs suivantes

1	2	3
4	6	8
5	7	9

La moyenne de ces termes est 5.

Les moyennes des termes secondaires sont les quotients par 3 des 27 sommes obtenues en prenant de toutes les manières possibles un terme dans chaque rangée.

Le total de ces sommes est 405; comme il y en a 27, la somme moyenne est 15, dont le tiers (moyenne secondaire) est 5.

La moyenne 5 est la moyenne des 3 moyennes primaires $\frac{2+6+7}{3}$

Elle se confond avec la moyenne des 27 termes des 3 séries, parceque ces 3 séries ont le même nombre d'éléments. Si l'on remplaçait, par exemple, la seconde série par une série de 4 éléments 4, 5, 6, 9 dont la moyenne est encore 6, la moyenne des moyennes primaires resterait égale à 5, tandis que la moyenne générale de tous les éléments des séries primaires deviendrait $\frac{51}{10} = 5{,}1$; la moyenne des termes secondaires deviendrait 15,5 et la moyenne des moyennes secondaires 5,18.

3. — La moyenne arithmétique n'est pas la seule expression qui se conserve, lors de la transformation des séries primaires en séries secondaires et dans les circonstances indiquées au paragraphe précédent; il en est encore de même d'un certain sous multiple de la fluctuation.

THÉORÈME II. — *Étant données* n *séries primaires, la fluctuation des moyennes secondaires obtenues en prenant un élément dans chaque série est la* $n^{ième}$ *partie de la moyenne des fluctuation des séries primaires.*

Considérons de nouveau la somme des éléments du terme secondaire de rang i

$$x_{i,1} + x_{i,2} + \ldots + x_{i,h} + \ldots + x_{i,n}$$

dont la moyenne est M_i, de sorte que

$$x_{i,1} + x_{i,2} + \ldots + x_{i,h} + \ldots + x_{i,n} = n\ M_i\ ,$$

puis la somme des moyennes primaires

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_n$$

laquelle est égale à $n \times M$. Le carré de la différence entre les deux sommes est

$$[(x_{i,1} - m_1) + (x_{i,2} - m_2) + \ldots + (x_{i,h} - m_h) + \ldots + (x_{i,n} - m_i)]^2$$

Ajoutons les carrés semblables formés pour tous les termes secondaires. Chaque carré se décompose en une somme de carrés tels que $(x_{i,h} - m_h)^2$ et une somme de doubles produits tels que

$$2\,(x_{i,h} - m_h)\ (x_{i,k} - m_k).$$

La somme des doubles produits est nulle car, pour toute valeur de $x_{i,h} - m_h$, la somme $\sum_1^{nk} (x_{i,k} - m_k)$ est nulle dans la distribution primaire de rang k.

On peut donc écrire

$$\sum_1^{v} [(x_{i,1} + x_{i,2} + \ldots + x_{i,n} - (m_1 + m_2 + \ldots$$

$$\ldots + m_n)]^2 = \sum_{h=1}^{h=n_h} \sum_{i=1}^{i=n} (x_{i,h} - m_h)^2$$

ou

$$[1] \quad \sum_1^{v} (x_{i,1} + x_{i,2} + \ldots + x_{i,n} - n\ M)^2 = \sum_1^{\substack{h=n \\ h=n_h}} (x_{i,h} - m_h)^2$$

M étant la moyenne des quantités $m_1, m_2, \ldots, m_n$ et en même temps, comme on l'a vu plus haut, la moyenne des moyenne secondaires.

Dans le second membre, le signe $\sum$ s'étend à $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_n = v$ termes, d'après ce qui a été dit au paragraphe précédent.

Étendons d'abord le signe $\sum$ aux seuls termes de la série primaire de rang h (dout le nombre est n_h), chaque somme se trouvera répétée, comme dans le paragraphe précédent, autant de fois qu'un élément x_h apparait dans l'ensemble des termes secondaires, soit un nombre

de fois égal à $\frac{\nu}{n_h}$. On peut donc mettre le second membre sous la forme plus précise

$$\sum_{h=1}^{h=n} \frac{\nu}{n_h} \sum_{i=1}^{i=n_h} (x_{i,h} - m_h)^2 \quad \text{ou} \quad \nu \sum_{h=1}^{h=n} \left[\frac{\sum_{h=1}^{i=n_h} x_{i,h} - m_h)^2}{n_h} \right]$$

En substituant cette valeur dans l'égalité (1) ci dessus, on peut écrire

$$[2] \qquad \sum_{1}^{\nu} (x_{i,1} + x_{i,2} + \ldots + x_{i,h} + \ldots + x_{i,n} - n\,M)^2 =$$

$$= \nu \sum_{h=1}^{h=n} \left[\frac{\sum_{i=1}^{i=n_h} (x_{i,h} - m_h)^2}{n_h} \right].$$

Or M_i étant la moyenne des quantités qui entrent dans le terme secondaire de rang i

$$x_{i,1} + x_{i,2} + \ldots x_{i,h} + \ldots + x_{i,n_n} = n\,M_i\,.$$

L'égalité précédente peut donc s'écrire

$$[3] \qquad \frac{n^2}{\nu} \sum_{1}^{\nu} (M_i - M)^2 = \sum_{h=1}^{h=n} \left[\frac{\sum_{i=1}^{n_h} (x_{i,h} - m_h)^2}{n_h} \right]$$

Désignons par $\mu'_{2,h}$ la fluctuation des termes de la série primaire de rang h, par μ_2 la fluctuation des moyennes des termes secondaires, l'égalité précédente prend la forme

$$[4] \qquad n^2\,\mu_2 = \Sigma\,\mu'_{2,h}$$

ou

$$[5] \qquad \mu_2 = \frac{1}{n} \left(\frac{\Sigma\,\mu'_{2,h}}{n} \right)$$

La fluctuation des moyennes secondaires est égale à la $n^{\text{ième}}$ partie de la moyenne des fluctuations primaires. Autrement dit: dans la transformation des n séries primaires en une série de termes secondaires, le rapport entre la moyenne des fluctuations primaires et la fluctuation des moyennes secondaires est égal au nombre des séries primaires.

Désignons par μ''_2 la moyenne des fluctuations des moyennes

primaires $\frac{\Sigma \mu'_{2,h}}{n}$, l'égalité précédente peut s'écrire

$$\mu_2 = \frac{1}{n} \mu''_2$$

L'égalité ci dessus peut encore s'exprimer autrement en prenant la racine carrée des deux membres

$$\sigma = \frac{\sigma''}{\sqrt{n}},$$

si l'on désigne par σ l'écart type (1) égal à $\sqrt{\mu_2}$, de là :

COROLLAIRE 1. — *L'écart type des moyennes secondaires est égal à la moyenne quadratique des écarts types des séries primaires divisée par la racine carrée du nombre des séries.*

Dans le cas particulier où toutes les séries primaires ont mêmes fluctuations $\mu''_2 = \frac{\Sigma \mu'_{2,h}}{n}$ est égal à μ'_2 valeur de la fluctuation commune.

L'égalité devient donc simplement

$$\mu_2 = \frac{\mu'_2}{n}$$

d'où

COROLLAIRE 2. — *Si toutes les séries primaires ont même fluctuation, l'écart type des moyennes secondaires est égal à l'écart type commun divisé par la racine carrée du nombre des séries.* Il en est ainsi notamment si toutes les séries primaires sont identiques.

Ou encore : le rapport entre la fluctuation commune des distri, butions primaires et la fluctuation des moyennes secondaires est constamment égal au nombre des distributions primaires associées. Reprenons l'exemple du paragraphe 2, Coroll. 2.

Les moyennes secondaires étant les quotients par 3 des nombres donnés dans cet exemple, les carrés des écarts entre ces moyennes et leur moyenne 5 seront les quotients par 9 des écarts entre les termes formés dans l'exemple et leur moyenne 15. Les carrés de ces écarts ont pour somme 162, dont le quotient par 9 est 18. Le carré moyen des écarts des moyennes secondaires, dont le nombre est 27 est égal à $\frac{18}{27} = \frac{2}{3}$.

---

(1) Nous traduisons ainsi, par souci de briéveté, le mot « standard deviation » employé par KARL PEARSON.

D'autre part les séries primaires ont respectivement pour fluctuation

$$\frac{1+1}{3}, \frac{4+4}{3}, \frac{4+4}{3}$$

dont la moyenne est 2. Le rapport entre 2 et $\frac{2}{3}$ est égal à 3, nombre des distributions primaires.

Il résulte du théorème II que, plus grandit le nombre des séries primaires d'où dérivent les moyennes secondaires, plus diminue la fluctuation de ces dernières. Celle-ci décroit indéfiniment quand n augmente indéfiniment. Or, la fluctuation n'est autre chose que le carré moyen des écarts autour de la moyenne. Ce carré moyen est composé d'une somme de carrés tous positifs ; il ne peut devenir très petit que si aucun des carrés n'est grand. Donc, à mesure qu'il se réduit, les écarts autour de la moyenne diminuent aussi, en moyenne, de plus en plus. Ils diminuent autant plus que leur nombre augmente beaucoup plus vite que n.

En effet, les termes secondaires sont au nombre de $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_n$. Si n augmente d'une unité, le nombre des termes secondaires devient $n+1$ fois grand, tandis che le nombre des séries s'est accru seulement d'une unité. D'où :

Corollaire 3. — *Lorsque le nombre des séries primaires augmente, les termes des séries secondaires, dont le nombre augmente beaucoup plus vite, fournissent des moyennes, qui se concentrent, de plus en plus, autour de leur moyenne commune.* Autrement dit, leur *dispersion* autour de cette moyenne diminue, de plus en plus.

4. — Théorème III. *Étant données* n *séries primaires comprenant respectivement* $n_1, n_2 \ldots n_n$ *élements, le cube moyen des écarts des moyennes secondaires à partir de leur moyenne est égal à la moyenne des cubes moyens des écarts des éléments des séries primaires, divisée par le carré du nombre* n *des séries primaires.*

Ce théorème est analogue au théorème II rélatif aux carrés moyens ou fluctuations.

Soient $m_1, m_2, \ldots, m_h, \ldots, m_n$ les moyennes des éléments des n séries primaires. Considérons un terme secondaire de rang i, dont les éléments ont pour moyenne M_i. La moyenne M de ces moyennes M_i est égale à la moyenne $\frac{m_1 + m_2 + \ldots . m_n}{n}$ (théorème I). Le cube de la différence entre la somme des éléments du terme secondaire

de rang i et la moyenne M peut s'écrire

$$[(x_{i,1}-m_1)+(x_{i,2}-m_2)+\ldots+(x_{i,h}-m_h)+\ldots+(x_{i,n}-m_n)]^3.$$

Ajoutons tous les cubes semblables. Le total comprend

1°) une somme de cubes $\Sigma\,(x_{i,h}-m_h)^3$

2°) une somme de produits tels $\Sigma\,(x_{i,h}-m_h)(x_{i,k}-m_k)^2$ et de produits tels que $\Sigma\,(x_{i,h}-m_h)^2(x_{i,k}-m_k)$.

Dans cette somme de produits, on peut toujours séparer les différences $(x_{i,h}-m_h)$ ou $(x_{i,k}-m_k)$, dont chacune est multipliée par un carré de même valeur, pour tous les éléments de la même série primaire. Par exemple, on peut isoler les produits tels que

$$(x_{i,x}-m_x)^2\left[\sum_{h=1}^{h=n}{}_h\,(x_{i,h}-m_h)\right]$$

les $x_{i,h}$ appartenant tous à la même série h, dont les éléments ont pour moyenne m_h.

En conséquence, la somme des écarts ainsi groupés est nulle et, comme tous les produits du développement peuvent être répartis de la sorte, il en résulte que la somme de tous ces produits est nulle. On a donc

$$\Sigma\,[x_{i,1}+x_{i,2}+\ldots+x_{i,h}+\ldots+x_{i,n}-(m_1+m_2+\ldots+m_n)]^3=$$
$$=\Sigma\,(x_{i,h}-m_h)^3$$

Le premier membre comprend autant de cubes qu'il y a de termes secondaires, c'est à dire ν cubes. On peut l'écrire

$$\sum_1^{\nu}(n\,M_i-n\,M)^3=n^3\sum_1^{\nu}(M_i-M)^3.$$

Dans le second membre, étendons le signe Σ aux seuls éléments de la distribution primaire de rang h, dont le nombre est n_h. Chacun de ces éléments s'introduit $\frac{\nu}{n_n}$ fois dans l'ensemble des termes secondaires (théorème I).

On peut donc mettre le second membre sous la forme plus précise

$$\sum_{h=1}^{h=n}\frac{\nu}{n_h}\sum_{i=1}^{i=n_h}(x_{i,h}-m_h)^3 \quad \text{ou} \quad \nu\sum_{h=1}^{h=n}\sum_{i=1}^{i=n_h}\frac{(x_{i,h}-m_h)^3}{n_h}$$

Désignons par μ_3 le cube moyen $\dfrac{\sum_1^{\nu} (M_i - M)^3}{\nu}$

» $\mu'_{3,h}$ » $\dfrac{\sum (x_{i,h} - m_h)^3}{n_h}$

» μ''_3 la moyenne $\dfrac{1}{n} \sum_{h=1}^{h=n} \mu'_{3,h}$.

Avec ces notations, l'égalité précédente prend la forme

$$n^3 \mu_3 = n \mu''_3$$

d'où

$$\mu_3 = \frac{\mu''_3}{n^2} .$$

Corollaire. Dans le cas où les séries primaires ont même cube moyen μ'_3

$$\mu''_3 = \mu'_3$$

et l'on peut écrire

$$\mu_3 = \frac{\mu'_3}{n^2} .$$

Remarque. Les théorèmes II et III ne peuvent s'étendre aux puissances supérieures à la troisième, parce que les produits qui se forment dans le développement d'une puissance ne donnent une somme nulle que dans les cas de la seconde et de la troisième puissance.

5. — Nous avons vu (Corollaire 2 du théorème II), que l'écart type des moyennes secondaires formées par le mécanisme précédemment décrit, à l'aide de n séries primaires, décroit proportionellement à $\sqrt{n}$.

Une proposition due aussi à Bienaymé permet de se rendre compte sommairement de la répartition des écarts des moyennes secondaires autour de leur moyenne générale et de formuler le théorème suivant.

Théorème IV. *Si l'on mesure les écarts des moyennes secondaires à partir de leur moyenne, en prenant pour unité l'écart-type, le nombre rélatif des écarts supérieurs à une limite donnée, positive ou négative, peut être rendue aussi faible qu'on le veut en augmentant suffisamment le nombre des séries primaires associeés.*

Considérons un écart particulier, que nous mesurons en prenant

$\sqrt{\mu''_2}$ pour unité, μ''_2 étant la moyenne $\frac{\Sigma \mu'_2}{n}$ des fluctuations des séries primaires.

Soit t le nombre de ces unités, c'est à dire la mesure d'un écart quelconque. Cet écart est par conséquent égal à $\pm t \sqrt{\mu''_2}$.

Pour l'ensemble des moyennes secondaires, la moyenne des carrés des écarts, ou la fluctuation μ_2, est donnée par l'égalité (th. II)

$$\mu_2 = \frac{1}{n} \mu''_2$$

μ_2 est la fluctuation des ν moyennes secondaires, c'est à dire

$$\mu_2 = \frac{\Sigma (M_i - M)^2}{\nu} .$$

Considérons, parmi les écarts élevés au carré dans le second membre, ceux qui sont plus grands que $+ t \sqrt{\mu''_2}$ ou plus petits que $- t \sqrt{\mu''_2}$. La somme de leurs carrés, que nous désignerons par T, est certainement plus petite que la somme de tous les carrés tels que $(M_i - M)^2$.

On peut donc écrire

$$T < \sum_1^n (M - M_{i_2})^2$$

ou

$$T = k \nu \mu_2 = \frac{k \mu''_2}{n} \nu$$

k étant plus petit que l'unité.

D'autre part, soit ν' le nombre des carrés de la fluctuation secondaire, qui correspondent aux écarts dépassant les limites $\pm t \mu_2$, ν' étant nécessairement plus petit que ν, nombre total des termes.

Dans la fluctuation, les carrés correspondants dépassent $t^2 \mu''_2$.

Chacun des termes dépassant $\pm t^2 \mu''_2$ est nécessairement aussi plus grand en valeur absolue que $t^2 \mu''_2$. Dans la fluctuation, le total des termes correspondants est donc plus grand que

$$t^2 \mu''_4 \times \nu'$$

Dès lors on peut écrire

$$T = \frac{1}{k'} t^2 \mu''_2 \nu' \quad , \quad k' < 1.$$

D'où, en égalant les deux expressions de T, il vient

$$\frac{\nu k \mu''_2}{n} = \frac{\nu'}{k'} t^2 \mu''_2$$

ce qui donne

$$\frac{\nu'}{\nu} = \frac{k\,k'}{n\,t^2}.$$

Le nombre proportionnel des termes secondaires compris entre les limites $\pm t\sqrt{\mu''_2}$ est dès lors $\frac{\nu - \nu'}{\nu} = 1 - \frac{k\,k'}{n\,t^2}$, k et k' étant deux nombre indépendants de n. Le nombre rélatif des termes compris dans les limites $\pm t\sqrt{\mu''_2}$ peut donc être rendu aussi voisin de l'unité qu'on le veut en donnant à n une valeur suffisamment grande.

6. — *Exemple* — Soient les 4 séries primaires

$$\begin{array}{c} 2 - 5 - 8 \\ 3 - 4 - 7 - 10 \\ 6 - 9 - 15 \end{array}$$

pour lesquelles

$$n_1 = 3 \quad n_2 = 4 \quad n_3 = 3 \quad n = 3$$

$$m_1 = 5 \quad m_2 = 6 \quad m_3 = 10 \quad M = \frac{21}{3} = 7 \quad (M' = 6{,}9)$$

$$\mu'_1 = 6 \quad \mu'_2 = 7\,{}^1\!/_2 \quad \mu'_3 = 14$$

$$\mu''_2 = \frac{27.5}{3}\,\mu_2 = \frac{27.5}{9}\,\frac{\mu''_2}{\mu_2} = 3$$

$$\mu''_3 = \frac{990}{36} = \frac{27.5}{3}\,\mu_3 = \frac{27.5}{27}\,\frac{\mu''_3}{\mu_3} = 3^2$$

Somme des carrés des deux écarts au delà de

$$\pm\sqrt{\frac{27.5}{3}} = \frac{244}{9} \qquad (t = 1)$$

Somme des carrés des 34 écarts compris dans

$$\pm\sqrt{\frac{27.5}{3}} = \frac{746}{9}\left(\text{total } \frac{990}{9}\right)$$

$$\text{On a } k = \frac{244}{9} \times \frac{3 \times 3}{27.5} = \frac{1}{4} \text{ environ}$$

$$k' = \frac{27.5}{3} \times \frac{2 \times 9}{244} = \frac{2}{3} \text{ environ, } \frac{\nu'}{\nu} = \frac{2}{36}\,\frac{\frac{1}{4} \times \frac{2}{3}}{3} = \frac{k\,k'}{n}$$

7. — Nous avons obtenu deux expressions différentes de μ_2 suivant que les n séries ont même moyenne ou bien que la moyenne varie suivant les séries.

Il importe de se rendre compte de la différence des valeurs de μ_2 suivant que s'applique l'une ou l'autre des deux expressions.

Il s'agit en somme de comparer la formule (3) du paragraphe (3) à ce que devient cette formule, quand on substitue aux moyennes m_n des séries primaires, la moyenne de ces moyennes :

$$M = \frac{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}{n}$$

Les deux expressions à comparer sont

$$\frac{1}{n} \sum_{1}^{h=n} \sum_{1}^{i=n_h} \frac{(x_{i,h} - m_h)^2}{n_h} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{n} \sum_{1}^{h=n} \sum_{1}^{i=n_h} \frac{(x_{i,h} - M)^2}{n_h}.$$

Or

$$\sum_{1}^{n_h} (x_{i,h} - m_h)^2 = \sum_{1}^{n_h} (x_{i,h} - M)^2 - n_h (M - m_h)^2$$

d'où

$$\frac{1}{n} \sum_{1}^{n} \sum_{1}^{n_h} \frac{(x_{i,h} - m_h)^2}{n_h} = \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} \sum_{1}^{n_h} \frac{(x_{i,h} - M)^2}{n_h} - \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} (M - m_h)^2.$$

Cette égalité est vraie, que les fluctuations exprimées par le premier terme du second membre soient inégales ou égales. La valeur de μ_2 exprimée par le premier membre est donc inférieure à la valeur que prendrait cette fluctuation, si toutes les séries primaires avaient même moyenne. La difference est égale à la fluctuation des moyennes des séries primaires.

Entre les deux cas, dont nous venons de nous occuper, celui de séries ayant mêmes moyennes et celui de séries dont les moyennes diffèrent, se place le cas de séries se distribuant en groupes tels que les série d'un même groupe ont toutes même moyenne, mais cette moyennes varie d'un groupe à l'autre.

8. — Considérons des séries primaires comprenant le même nombre d'éléments n', ceux-ci est réparti en s groupes composés d'un même nombre n de séries, dont les éléments ont même moyenne m. Cette moyenne m est identique à la moyenne M des $n\,n'$ éléments du groupe.

Soit M' la moyenne générale des $n\,n's$ éléments de l'ensemble des groupes ou de séries, on peut énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME V. — *Dans l'ensemble des* s *groupes de séries composées comme il a été expliqué ci dessus, la moyenne générale des éléments de l'ensemble est aussi la moyenne des moyennes secondaires des groupes.*

Désignons, en effet, par T_i un terme secondaire d'un groupe; dans un groupe quelconque $T_i = n\,M_i$. On peut écrire pour le groupe

$$\sum_{1}^{n'^n} T_i = n \sum_{1}^{n'^n} M_i = n'^{n-1} \sum_{1}^{nn'} x$$

Car il y a n'^n termes secondaires et autant de moyennes secondaires; d'autre part, la somme des éléments des n séries primaires se trouve $\frac{n'^n}{n'} = n'^{n-1}$ fois dans la somme des termes secondaires.

Ajoutons les égalités semblables pour les s groupes de n séries, chaque série comprenant n' éléments, on obtient

$$\sum_{1}^{s\,n'^n} T_i = n \sum_{1}^{s\,n'^n} M_i = n'^{n-1} \sum_{1}^{nn's} x$$

Il y a $n\,n's$ éléments x sous le signe Σ du second membre; les moyennes M_i sont au nombre de $s\,n'^n$, de même que les termes T_i. En divisant les membres de l'égalité précédente par $nn'^n s$, il vient

$$\frac{\Sigma\,T_i}{nn'^n s} = \frac{\Sigma\,M_i}{sn'^n} = \frac{\Sigma\,x}{nn's} = M'$$

égalité, qui est l'expression du théorème.

9. — THÉORÈME VI. *Le carré moyen des écarts entre les moyennes secondaires* M_i *d'un groupe de* n *séries et une grandeur quelconque représentée par* M, *est égal à une somme de deux termes, dont l'un est la moyenne des carrés moyens des écarts des éléments à partir de* M' *l'autre est, à un* n$^{\text{ième}}$ *près, le carré de l'écart entre la moyenne du groupe et* M'.

D'après le paragraphe 3 (2^e partie) égalité (3), dans un groupe, on a l'égalité

$$\frac{1}{\nu} \sum_{1}^{\nu} (M_i - M)^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{1}^{n} \frac{\sum_{1}^{n'} (x - M)^2}{n'}$$

car par hypothèse, pour les séries d'un même groupe ayant même moyenne M, on a $m_h = M$; ν est le nombre des moyennes secondaires telles que M_i.

Or, en vertu de la propriété connue de la moyenne, si l'on substitue

$$(M_i - M' + M' - M) \qquad \text{à} \qquad (M_i - M)$$

et

$$(x - M' + M' - M) \qquad \text{à} \qquad (x - M)$$

on déduit de l'égalité précédente, celle-ci:

$$\frac{1}{\nu}\left[\sum_1^{\nu}(M_i - M')^2 - \nu(M - M')^2\right] = \frac{1}{n^2}\left[\sum_1^{n}\frac{\sum_1^{n'}(x - M')^2}{n'} - n(M - M')^2\right]$$

D'où en faisant passer dans le second membre le terme en $M - M'$ du premier

$$\frac{1}{\nu}\sum_1^{\nu}(M_i - M)^2 = \frac{1}{n}\frac{\sum_1^{nn'}(x - M')^2}{nn'} + \frac{n-1}{n}(M - M')^2$$

égalité qui traduit l'énoncé du théorème.

THÉORÈME VII. — *La moyenne des fluctuations des moyennes secondaires de l'ensemble des groupes autour de la moyenne générale* **M'** *dépasse la valeur qu'elle prendrait si les éléments de tous les groupes avaient même moyenne et si les éléments des séries primaires avaient la même fluctuation, d'une quantitée égale à* $\frac{1}{n}$ *près à la fluctuation des moyennes des groupes.*

L'égalité (1) du théorème précédent s'applique à un groupe particulier.

Formons la somme de toutes les égalités semblables pour tous les groupes; cette somme se présente comme suit:

$$\sum_1^{s}\frac{\sum_1^{\nu}(M_i - M)^2}{\nu} = \frac{1}{n}\sum_1^{s}\frac{\sum_1^{nn'}(x - M')^2}{nn'} + \frac{n-1}{n}\sum(M - M_i)^2$$

Or, les $nn's$ éléments de toutes les séries ont pour moyenne M'. Désignons par μ'_2 la fluctuation de ces éléments autour de M'

$$\mu''_2 = \frac{\sum_1^{nn's}(x - M')^2}{nn's}$$

D'après cette notation

$$\sum_1^s \frac{\sum_1^{nn'} (x - M)^2}{nn'} = s\,\mu''^2.$$

Désignons par μ_2 la fluctuation des moyennes secondaires, qui ont aussi pour moyenne M' (théorème I). On peut écrire

$$\sum_1^s \frac{\sum_1^{\nu} (M_i - M)^2}{\nu} = s \sum \mu^2$$

Et enfin désignons par π_2 la fluctuation des moyennes M_i des groupes autour de leur moyenne M' : on a

$$\sum (M - M') = s\,\pi_2$$

Avec ces notations, l'égalité précédente s'écrit

$$\sum_1^s \mu_2 = \frac{s}{n} \sum_1^s \mu''_2 + \frac{n-1}{n} s\,\pi_2$$

d'où, en divisant les termes par s

$$\frac{\sum_1^s \mu_2}{s} = \frac{1}{n}\,\mu''_2 + \frac{n-1}{n}\,\pi_2$$

Si toutes les moyennes des groupes sont égales, et par conséquent égales à M', π_2 est nul; le second membre de l'égalité précédente se réduit au premier terme.

Or, celui-ci $\frac{1}{n}\,\mu''_2$ est la fluctuation des moyennes secondaires d'un groupe dont toutes les séries primaires ont pour fluctuation μ''_2.

D'où le théorème énoncé.

10. — Supposons maintenant que, dans chacun des s groupes, on ait observé la fluctuation des moyennes secondaires.

On a fait s observations de ce genre. La fluctuation moyenne de ces s observations est

$$\frac{\sum_1^s \mu_2}{s}.$$

Le théorème IV du § 5 s'applique; il est toutefois utile d'en reprendre l'exposé dans ce cas particulier en vue d'en tirer une observation nouvelle.

Considérons les s termes, qui composent cette fluctuation.

Parmi ceux-ci, il y en a de plus petits, d'autres plus grands que μ''_2, fluctuation de l'ensemble des termes tels que x_i autour de M'.

Soit $t^2\,\mu''_2$ un multiple de μ''_2; désignons par s' le nombre des termes de la fluctuation ci-dessus qui s'écartent de μ''_2 davantage que $t^2\,\mu''_2$, dans un sens ou dans l'autre.

Leur somme T est nécessairement plus petite que la somme de tous les termes de la fluctuation. On peut donc écrire

$$T = k\left(\frac{\mu''_2}{n} + \frac{n-1}{n}\,n_3\right) \quad , \quad k < 1$$

D'autre part la valeur minimum de ce terme est $t^2\,\mu''_2$. La somme T est donc plus grande que le produit du nombre s' par cette valeur minimum. On peut donc l'égaler à

$$T = \frac{s'}{k'}\,t^2\,\mu''_2 \quad , \quad k' < 1,$$

ce qui permet d'écrire

$$k\left(\frac{\mu''_2}{n} + \frac{n-1}{n}\,\mu_2\right) = \frac{s'}{k'}\,t^2\,\mu''_2$$

d'où

$$s' = \frac{kk'}{n\,t^2}\left[1 + (n-1)\frac{\mu_2}{\mu''_2}\right]$$

où k et k' sont des nombres plus petits que 1.

Le nombre des termes situés au delà des limites $t^2\,\mu''_2$ diminue à mesure que n augmente; le nombre rélatif de ces termes $\frac{s'}{s}$ diminue en raison de l'augmentation de s et de n.

Les termes se concentrent donc autour de leur moyenne, quand le nombre des séries de chaque groupe augmente et aussi avec le nombre des groupes. La présence du coefficient de $\frac{k\,k'}{nt^2}$ dans l'égalité précédente, coefficient qui n'est égal à l'unité que si $n = 1$, — c'est à dire quand les séries primaires ont toutes le même caractère, soit d'identité, soit de diversité —, permet de distinguer les hypothèses possibles quand on doit interprêter les résultats numériques d'origine complexe.

11. — Si l'on admet que la composition de ces résultats est le fait de la superposition de certains éléments, de même que les termes et moyennes secondaires des schémas précédents résultent de la superposition d'éléments primaires, on doit se demander quelle est

la formation des séries primaires qui donne la meilleure interprétation des résultats.

Il faut voir d'abord si, d'après la nature de la question, on peut fixer la composition d'une série primaire servant de moule sur lesquels se modèleraient d'autres séries. Suivant la composition de cette série, suivant le mode de répartition des éléments des diverses grandeurs, la concentration des termes secondaires et des moyennes secondaires sera différente.

Une fois fixée la composition d'une série, que l'on peut supposer associée à un certain nombre de séries identiques, on peut alors se demander comment obtenir la meilleure représentation des résultats. Sera-ce en supposant que toutes les séries sont identiques, ou bien en supposant qu'elles se répartissent par groupes de séries identiques? Dans le premier cas, les éléments composants du phenomène étudié sont supposés demeurer les mêmes dans l'espace et dans le temps. Dans le second cas, on admet qu'ils se différencient par groupes formés soit dans l'espace, soit dans le temps.

Le théorème précédent permet de choisir l'hypothèse. En effet, dans l'hypothèse de séries secondaires formées au moyen de séries primaires ayant toutes même moyenne et même fluctuation, le nombre s des observations, dont le nombre est au-delà des limites $\pm t \sqrt{\mu''_2}$ est égal à $\frac{k\,k'}{n\,t^2}$.

Dans l'hypothèse de séries primaires à moyennes différant d'un groupe à un autre, le nombre s' est égal à

$$\frac{k\,k'}{n\,t^2}\left[1 + (n-1)\,\frac{\pi_2}{\mu''_2}\right]$$

Le rapport des deux expressions $1 + (n-1)\,\frac{\pi_2}{\mu''_2}$ est le rapport des nombres d'observations s'écartant de la moyenne, au delà d'une quantitée donnée, selon que l'on se trouve dans l'un ou dans l'autre cas.

Mais, avant de se prononcer sur l'une ou sur l'autre des deux hypothèses, il faut s'assurer, par l'analyse du sujet, que l'hypothèse initiale rélative à la composition du type de série primaire est elle même vraisemblable.

Le rapport ci-dessus $1 + (n-1)\,\frac{\pi_2}{\mu''_2}$ est d'autant plus grand, que n est plus grand et inversement. La concentration des observations autour de la moyenne est, dans ce cas, d'autant plus voisine

de celle qui se produirait si toutes les séries primaires étaient semblables, que le nombre des éléments compris dans l'observation est plus petit.

12. — *Exemple.* Soient les trois groupes de séries

$$\left\{\begin{matrix}0&1&2&5\\0&1&2&5\end{matrix}\right\}\ m_1=2 \qquad s=3$$

$$\left\{\begin{matrix}1&2&3&6\\1&2&3&6\end{matrix}\right\}\ m_2=3 \qquad \begin{matrix}M'=3\\n=2\end{matrix}$$

$$\left\{\begin{matrix}0&3&5&8\\0&3&5&8\end{matrix}\right\}\ m_3=4 \qquad n'=4$$

on forme comme précédemment les termes secondaires des 3 groupes. Si T_i désigne un terme quelconque ($T_i = n\,M_i$), on trouve

$$\Sigma\,(T_i - n\,M')^2 = \begin{array}{|l} 176 \text{ pour le premier groupe} \\ 112 \quad \text{» second} \\ 336 \quad \text{» troisième} \\ \hline 624 \end{array}$$

d'où $\Sigma\,(M_i - M')^2 = \begin{array}{|l} 44 \\ 28 \\ 84 \\ \hline 156 \end{array}$ d'où $\dfrac{\Sigma\,\mu_2}{s} = \dfrac{156}{16 \times 3}$; $nn's\,\mu''^2 = \begin{array}{|l} 36 \\ 28 \\ 76 \\ \hline 140 \end{array}$

d'où $\mu''^2 = \dfrac{140}{24}\pi_2 = \dfrac{(2-3)^2+(3-3)^2+(4-3)^2}{3} = \dfrac{2}{3}$

Et l'on a $\dfrac{156}{3 \times 16} = \dfrac{140}{2 \times 24} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3}$

13. — En résumé, la formation de moyennes secondaires en empruntant de toutes les manières possibles un élément à l'une des séries primaires que l'on associe à cet effet, donne lieu à une certaine concentration de ces moyennes secondaires. Cette concentration s'explique puisque son dégré s'exprime par la proportion des moyennes secondaires qui sont comprises dans un certain intervalle. L'unité de mesure de cet intervalle est l'écart type des moyennes secondaires, lequel dépend des écarts types des éléments des séries primaires.

Si la nature de la question traitée conduit à adopter un schéma de séries identiques, la concentration des écarts à la moyenne peut être rendue aussi grande qu'on le veut, en prenant un nombre de séries primaires assez grand ; son dégré croît comme la racine carrée de ce nombre (Bernouilli).

Si la nature de la question ne permet pas de supposer l'identité des séries, le degré de la concentration des écarts croît encore comme la racine carrée du nombre des séries, mais l'unité de mesure des écarts est plus faible, que si toutes les séries avaient pour moyenne commune la moyenne des moyennes des séries différentes. Il y avantage, pour accroître le degré de concentration, a tenir compte des différences des séries (POISSON).

Dans le cas particulier où l'on est en droit de supposer que les séries primaires, bien que n'étant point toutes semblables, peuvent se répartir en groupes de séries identiques, l'unité de mesure des écarts dépasse d'autant plus l'unité qui conviendrait au cas de séries semblables dans leur totalité, que le nombre des séries d'un même groupe est plus grand (LEXIS).

3e PARTIE - Répartition des éléments sous forme alternative.

1. — Dans la formation des termes secondaires au moyen d'éléments composants empruntés à un certain nombre de séries primaires, nous n'avons point fait d'hypothèse sur la grandeur des éléments da chaque série, en dehors des quelques cas particuliers, qui ont été examinés. Les éléments de chaque série pouvaient être distincts, ou certains d'entre eux identiques, la forme de la caracté ristique qui détermine la variabilité des moyennes secondaires, d'après la variabilité des éléments des séries primaires, n'en était point affectée, non plus que le mode de distribution ou de concentration de ces moyennes.

Nous considérerons maintenant le cas particulier de séries composées d'éléments parmi lesquels nous distinguerons deux groupes, d'espèce différente dont l'un comprend N' et l'autre N'' éléments, de telle sorte que la somme $N' + N''$ est égale au nombre N des éléments de chaque série.

Nous allons chercher à préciser la formation des termes secondaires, selon le groupe dans lequel sont puisés les éléments du terme secondaire.

2. — THÉORÈME I. - *Soient* n *séries primaires dont chacune est composée de* N *éléments répartis en deux groupes de* N′ *et* N″ *éléments respectivement. Ces séries sont elles mêmes réparties en deux catégories, l'une comprenant* r *séries dans chacune desquelles on puise un élément du second groupe, l'autre comprenant* n — r *séries où l'on puise un élément du premier groupe.*

Les termes secondaires que l'on peut former en empruntant, dans ces conditions, un élément à chacune des n *séries primaires sont au nombre de* $N'^{n-r} N''^{r}$.

Supposons, pour préciser les idées, 7 séries identiques dont chacune soit composée de 9 éléments répartis en deux groupes. Le premier de ces groupes contient 4 éléments désignés par la lettre x : x_1, x_2, x_3, x_4 ; le second se compose de 5 éléments désignés par la lettre y : y_1, y_2, y_3, y_4. y_5. Chacune des 7 séries comprend donc les 9 éléments suivants

$$x_1 \ , \ x_2 \ , \ x_3 \ , \ x_4 \ , \ y_1 \ , \ y_2 \ , \ y_3 \ , \ y_4 \ , \ y_5.$$

Chaque élement d'une espèce se distingue des autres, d'abord par son indice, ensuite par le numéro d'ordre de la série à laquelle il appartient.

Dans cet exemple

$$N' = 4 \ , \quad N'' = 5 \ , \quad N = 9 \ , \quad n = 7.$$

Un terme secondaire quelconque se forme en prenant un élément et un seul dans chaque série, soit en tout 7 éléments, qui peuvent être pris indifféremment parmi les x et parmi les y.

Nous pouvons représenter cette formation à l'aide d'une table composée de 7 rangées numerotées de 1 à 7 et de 9 colonnes. Dans chaque série, on puise un élément particulier, par exemple x_1 dans la première série, y_2 dans la seconde, x_3 dans la troisième, etc. Les éléments ainsi choisis sont encadrés.

Comme les 7 séries sont identiques, un élément de même espèce et de même indice peut figurer plusieurs fois dans un terme secondaire *à la condition toutefois qu'il provienne de séries différentes.*

Considérons un terme secondaire composé de trois éléments x et de 4 éléments y, pris dans des séries differentes dont les rangs sont 1, 3, 6 pour les x, 2, 4, 5, 7 pour les y :

	4 x				5 y				
1	$\boxed{x_1}$	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
2	x_1	x_2	x_3	x_4	$\boxed{y_1}$	y_2	y_3	y_4	y_5
3	x_1	$\boxed{x_2}$	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
4	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	$\boxed{y_3}$	y_4	y_5
5	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	$\boxed{y_4}$	y_5
6	x_1	x_2	x_3	$\boxed{x_4}$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
7	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4	$\boxed{y_5}$

Le terme secondaire ainsi formé est $x_1 + x_2 + x_4 + y_1 + y_3 + y_4 + y_5$

Parmi les 7 éléments ainsi localisés, les 3 éléments x sont pris parmi les 4 du premier groupe. Or, à chacun, des 4 éléments x_1, x_2, x_3, x_4, peut s'ajouter, pour former le deuxième élément du terme secondaire, un autre de ces mêmes éléments, ce qui donne 4^2 sommes possibles. A chacune de ces sommes peut s'ajouter, comme troisième élément du terme secondaire, un quelconque des mêmes éléments, ce qui donne en tout 4^3 sommes possibles d'éléments x. A chacune de ces sommes s'ajoute l'une de celles fournies par les 4 éléments y, pris parmi les 5, qui composent les séries primaires, de sorte que le nombre total des termes secondaires que l'on peut former, quand on a fixé les trois rangées x et les quatre rangées y, est égal à

$$4^3 \times 5^4.$$

Le raisonnement est général. Le nombre 4 des éléments y de chaque terme correspond à la lettre r de l'énoncé, le nombre 3 des éléments x correspond à $n - r$, 7 étant la valeur de n dans l'exemple, 5 est, pour les y, la valeur de N'' ; 4 est, pour les x, la valeur de N'. Si donc l'on désigne par t_r, le nombre des termes secondaires que l'on peut former en marquant un élément x dans les trois rangées 1, 3, 6 et un élément y dans les quatres rangées 2, 4, 5, 7 les indices de x et de y recevant toutes les valeurs possibles de 1 à $n - r$ et de 1 à r, on peut écrire d'une manière générale

$$t_r = N'^{\,n-r}\, N''^{\,r}$$

Ce nombre t_r a été obtenu pour une disposition particulière des n séries primaires en deux catégories comprenant respectivement $n - r$ et r séries. Dans l'exemple actuel, les x sont pris dans les séries numérotés 1, 3, 6, les y numérotés 2, 4, 5, 7, soit les x dans $(n - r)$ séries particulières, les y dans r séries restantes. Le nombre total des termes secondaires que l'on peut former à l'aide des n séries primaires doit être cherché sans tenir compte du fait que les séries peuvent être identiques. Dès lors, il y a lieu de considérer le nombre des décompositions possibles des n séries en deux catégories de r et $(n - r)$ séries.

3. — Théorème II. - *Le nombre des termes secondaires que l'on peut former en prenant un élément dans chaque série, soit en tout* n *eléments dont* (n — r) *dans le premier groupe* (x) *et* r *dans le second groupe* (y), *quelles que soient les séries dans lesquelles se font ces emprunts, est égal au produit du nombre de termes for-*

més pour une disposition particulière des séries, où se puisent les éléments de chaque groupe, par le nombre des dispositions possibles de ces séries parmi les n.

En effet, dans l'ensemble des 7 séries primaires, le nombre t_7 des termes secondaires a été obtenu, après que l'on eût fixé les dispositions des 3 séries (1ère, 3e, 6e série dans notre exemple) dans lesquelles ont été puisés les 3 éléments x et celles des 4 séries (2e, 4e, 5e, 7e série dans notre exemple) dans lesquels ont été puisés les 4 éléments y.

Or la disposition des 4 séries y par exemple, peut changer de nombreuses façons. Désignons par P_4 le nombre des dispositions possibles des 4 séries y et des 3 séries x, parmi les 7 séries.

A chacune de ces dispositions correspondent t_4 termes secondaires. Donc le nombre des termes secondaires que l'on peut former en puisant 3 éléments x et 4 éléments y dans une série quelconque, étant representé par T_4, on aura

$$T_4 = t_4 \cdot P_4.$$

Le raisonnement étant général, on peut substituer au nombre particulier 4 le nombre, désigné par la lettre r, des éléments y et poser

$$T_r = t_r P_r = N'^{n-r} N''^{r} P_r ,$$

d'après le théorème I.

Nous allons maintenant voir, ce que devient le nombre des termes secondaires quand on augmente d'une unité le nombre des éléments y et que l'on diminue par conséquent d'une unité celui des éléments x, de façon à maintenir le total égal à n.

4. — Théorème III. - *Pour obtenir le nombre de termes secondaires que l'on peut former en prenant* (r + 1) *éléments* y *et* (n — r — 1) *éléments* x *dans les* n *séries primaires, quelque soit l'ordre des séries qui fournissent les éléments de chaque groupe* x *ou* y, *il suffit de multiplier le nombre des termes secondaires composés de* r *éléments* y *et* $(n - r)$ *éléments* x *par la fraction*

$$\frac{n - r}{r + 1} .$$

En effet, il faut substituer à l'un des x de chaque série l'un des y non encore employés, de façon à obtenir un y de plus, $r + 1$ au lieu de r. Par exemple, dans l'une des 3 rangées 1, 2, 6 affecteés aux éléments x, il faut introduire maintenant un élément y, ce qui

donne 3 substitutions possibles d'un y à un x c'est à dire, en général, $n - 1$ substitutions.

Le nombre des dispositions des n séries dans lesquelles sont puisés $n - r$ éléments x et r éléments y a été representé par P_r dans le paragraphe précédent : P_{r+1} sera le nombre des dispositions des n séries dans lesquelles on puise $r + 1$ éléments y et $(n - r - 1)$ éléments x.

La substitution d'un y à un x dans l'une quelconque des $n - r$ rangées x, donne $n - r$ dispositions pour chacune des P_r dispositions anciennes, on a par conséquent

$$P_{r+1} = P_r (n - r).$$

Par exemple, dans le tableau des 7 séries on peut substituer à x_2 un y, autre que ceux qui figurent déja, soit y_2, par exemple.

On obtient ainsi, au lieu de la suite des lettres encadrées:

[1] $$x_1\ y_1\ x_2\ y_3\ y_4\ x_4\ y_5$$

la nouvelle suite

[2] $$x_1\ y_1\ y_2\ y_3\ y_4\ x_4\ y_5$$

et l'on aurait pu aussi bien substituer y_2 à l'une quelconque des 4 lettres x: x_1, x_3, x_5, x_4:

Remarquons maintenant que la nouvelle suite (2) des lettres x et y s'obtient d'autres manières.

Par exemple, si l'on considère la suite

$$x_1\ x_2\ y_2\ y_3\ y_4\ x_4\ y_5$$

et que l'on substitue y_1 à x_2, on retrouvera la suite [2]

$$x_1\ y_1\ y_2\ y_3\ y_4\ x_4\ y_5$$

déjà formée ci-dessus.

Or, on peut substituer à x_2, un quelconque des y, qui sont maintenant au nombre de $r + 1$ (dans l'exemple, 5 y contre 2 x au lieu de 4 y contre 3 x prècédemment).

L'addition d'un élément de plus pris dans le groupe des y, et la réduction d'un élément appartenant au groupe des x, ont donc pour effet:

D'une part de multiplier par $n - r$ le nombre des dispositions possibles de séries où l'on puise tant les éléments x que les éléments y;

d'autre part, de donner pour chacune de ces dispositions, $r + 1$ termes secondaires identiques.

D'après cela, le nombre P_{r+1} des termes secondaires différents composés de $r+1$ éléments y et $(n-r-1)$ éléments x est donné par l'égalité

$$P_{r+1} = P_r \frac{n-r}{r+1} .$$

Dans l'exemple considéré, on a

$$P_5 = P_4 \times \frac{7-4}{5} .$$

5. — Théorème IV. *Etant données* n *séries primaires identiques, dont les* N *éléments sont répartis en deux groupes de* N' *et* N'' *éléments, le nombre des termes secondaires formés en puisant* r + 1 *éléments dans le second groupe, et* n — r — 1 *éléments dans le premier est égal au produit des deux fractions*

$$\frac{n-r}{r+1} \cdot \frac{N''}{N'}$$

et du nombre des termes secondaires formés en prenant respectivement n — r *et* r *éléments des mêmes groupes.*

En effet, d'après le théorème II, le nombre, T_r des termes secondaires que l'on peut former en prenant r éléments y est donné par l'égalité

$$T_r = N'^{n-r} N''^{r} P_r$$

où P_r représente le nombre des dispositions possibles des séries dans lesquelles on prend les $n-r$ éléments y.

On peut donc écrire de même en remplaçant r par $r+1$

$$T_{r+1} = N'^{n-r-1} N''^{r+1} P_{r+1} ;$$

or, d'après l'égalité précédente

$$N'^{n-r} N''^{r} = \frac{T_r}{P_r} ;$$

substituant, il vient

$$T_{r+1} = T_r \frac{N''}{N'} \cdot \frac{P_{r+1}}{P_r} .$$

Mais, d'après le théorème III

$$P_{r+1} = P_r \frac{n-r}{r+1} ;$$

en conséquence, on peut écrire l'égalité

[3] $$T_{r+1} = T_r \frac{N''}{N'} \cdot \frac{n-r}{r+1} ,$$

et, de même

$$[4] \qquad T_r = T_{r-1} \frac{N''}{N'} \frac{n-r-1}{r} .$$

Dans l'exemple de 7 séries, l'égalité prend la forme

$$T_5 = \frac{5}{4} \times \frac{3}{5} T_4 = \frac{3}{4} T_4 ,$$

puisque $n - r = 3$, $r = 4$, $N' = 4$, $N'' = 5$, c'est à dire que le nombre des termes secondaires composés de 2 éléments x et 5 éléments y est égal aux $\frac{3}{4}$ du nombre des termes secondaires composés de 3 éléments x et 4 éléments y.

Corollaire I. — D'après le théorème précédent, le produit des égalités [3] et [4], et de toutes celles que l'on obtient en faisant décroître successivement r jusqu'à 0, donne l'expression de T_r :

$$T_r = \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{1.2\dots r} N''^r N'^{n-r} =$$

$$= \frac{(n-1)\dots(n-r+1)}{1.2\dots(r-1)} \left[\frac{n-r}{r} + 1 \right] N''^r N'^{n-r} =$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{1.2\dots r} N''^r N'^{n-r} +$$

$$+ \frac{(n-1)\dots(n-r+1)}{1.2\dots(r-1)} N''^r N'^{n-r}$$

Écrivons $T_r^{(n)}$ à la place de T_r, pour indiquer que le terme est issu de n séries primaires.

Alors, on peut écrire de même

$$T_r^{(n-1)} = \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-r)}{1.2\dots r} N''^r N'^{n-1-r}$$

$$T_{r-1}^{(n-1)} = \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{1.2\dots(r-1)} N''^{r-1} N'^{n-r}$$

Dès lors l'expression de T_r peut se mettre sous la forme :

$$T_r^{(n)} = T_r^{(n-1)} \times N' + T_{r-1}^{(n-1)} N''$$

De là un second mode de formation des termes secondaires. Au lieu de former le terme de rang r, dans la suite issue de n séries primaires, à l'aide du terme de rang $r-1$ on peut le former à l'aide de deux termes consécutifs de la suite des termes issus de $n-1$ séries primaires.

Corollaire II. — *Si le nombre N'' des éléments du groupe auquel on emprunte* r *éléments pour former un terme secondaire dépasse le nombre* N' *des éléments de l'autre groupe, le rapport entre le nombre de termes secondaires qui contiennent* r + 1 *éléments du premier groupe et le nombre de termes secondaires qui n'en contiendraient que* r *est supérieur à l'unité, quand* r *est petit. Il diminue à mesure que* r *augmente jusqu'à devenir très voisin de l'unité; ensuite il continue à diminuer en restant inférieur à l'unité.*

Le rapport de T_{r+1} à T_r peut s'écrire

$$\frac{T_{r+1}}{T_r} = \frac{N''}{N'}\left(\frac{n+1}{r+1} - 1\right)$$

Si $N'' > N'$ et r petit, le rapport est forcément plus grand que 1. Il devient égal à 1 pour

$$\frac{n-r}{r+1} \cdot \frac{N''}{N'} = 1$$

d'où

$$r = \frac{n\,N'' - N'}{N' + N''} = \frac{n\,N'' - N'}{N}$$

De même, partant du rapport

$$\frac{T_r}{T_{r-1}} = \frac{N''}{N'} \cdot \frac{n-r+1}{r}$$

on constate que ce rapport devient égal à 1, pour

$$r = \frac{(n+1)\,N''}{N}$$

En fait, r est un nombre entier; on vient d'en obtenir deux valeurs qui diffèrent de

$$\frac{(n+1)\,N'' - (n\,N'' - N')}{N} = 1$$

c'est à dire d'une unité. Quand r est le nombre entier le plus voisin compris entre les deux valeurs, ci-dessus, le nombre des termes secondaires, formés en prenant $n - r$ éléments dans le premier groupe et r dans le second, est plus grand que les nombres qui résulteraient d'une autre valeur de r. Désignons cette valeur particulière par R, R peut prendre une valeur au moins égale à $\frac{n\,N'' - N'}{N}$

ou au plus égale à $\frac{(n+1)N''}{N}$. Pour une valeur de r égale à R, le nombre T_r, ou T_{r+1}, atteint un maximum.

6. — Nous avons admis jusqu'ici que les deux groupes d'éléments de chaque série étaient composés d'éléments différents, ce qui n'a pas permis de tenir compte de la valeur des termes secondaires dont on connaissait seulement la composition.

Nous considérerons maintenant le cas particulier de deux groupes dont chacun est composé d'éléments identiques, le premier d'éléments égaux à m', le second d'éléments égaux à m''. Nous supposerons que m' est plus petit que m''; N' et N'' sont comme précédemment les nombres d'éléments du premier et du second groupe respectivement.

Dans ce cas particulier la moyenne des grandeurs des éléments de chaque série primaire est égale à $\frac{N'm' + N''m''}{N}$; nous la désignerons pour simplifier sous le nom de moyenne primaire. Rappelons que nous appelons moyenne secondaire le quotient de la somme des éléments d'un terme secondaire par le nombre de ces éléments, c'est à dire, par le nombre des séries primaires.

Nous considérerons toujours qu'un terme secondaire est composé de $n - r$ éléments empruntés au premier groupe, c'est à dire, de $n - r$ éléments égaux à m', puis de r éléments égaux à m''.

Dans ces conditions, nous verrons comment varient les moyennes secondaires, quand varie le nombre r et nous chercherons les rélations simples qui s'établissent entre les caractéristiques des éléments de chaque série primaire et les caractéristiques des moyennes secondaires.

Théorème V. — *L'amplitude de la variation d'une moyenne secondaire, quand* r *varie de* 0 *à* n *est égale à la différence* a *des grandeurs des éléments* m'' *et* m' *des groupes primaires.*

En effet, lorsque le nombre des éléments des groupes m'' incorporés dans chaque terme secondaire varie de 0 à n, la moyenne secondaire change constamment de valeur.

Pour $r = 0$, la moyenne ne comprend aucun élément m''. Donc sa valeur est m', puisque la somme des n éléments est $n\,m'$.

Pour $r = n$, la moyenne ne comprend que des éléments m'', sa valeur est donc m''.

En conséquence, l'amplitude de sa variation est $a = m'' - m'$

THÉORÈME VI. *La somme de toutes les moyennes secondaires est égale à la somme des éléments de chacune des* n *séries primaires multipliée par la puissance* $(n-1)^{\text{ième}}$ *du nombre des éléments.*

En effet, d'après le théorème I de la deuxième partie, la moyenne de toutes les moyennes secondaires est égale à la moyenne des éléments de chaque série primaire, c'est à dire à

$$\frac{N' m' + N'' m''}{N}$$

Le nombre des moyennes secondaires est égal à $(N' + N'')^n$, donc la somme de toutes les moyennes secondaires est égale à

$$\frac{N' m' + N'' m''}{N' + N''} (N' + N'')^n = (N' m' + N'' m'') N^{n-1}$$

puisque $N' + N'' = N$.

7. — THÉORÈME VII. *La fluctuation des moyennes secondaires est égale à la* $n^{\text{ième}}$ *partie du produit des nombres rélatifs des éléments de chaque groupe par le carré de l'amplitude de variation de ces moyennes, c'est-à-dire par le carré de la différence des deux éléments distincts de chaque série primaire.*

Dans ce cas, en effet, la moyenne des éléments de la série primaire fondamentale est $\frac{N' m' + N'' m''}{N}$; la fluctuation de ces éléments est égale à

$$= \frac{1}{N}\left[N' m' - \left(\frac{N' m' + N'' m''}{N}\right)\right]^2 + \left[N'' m'' - \left(\frac{N' m' + N'' m''}{N}\right)\right]^2$$

$$= \frac{1}{N}\left\{N'\left[\frac{m'(N' + N'' - N') - N'' m''}{N}\right]^2 + N''\left[\frac{m''(N' + N'' - N'') - N' m'}{N}\right]^2\right\}$$

$$= \frac{1}{N^3}\left[N' N''^2 (m' - m'')^2 + N'' N'^2 (m' - m'')^2\right] = \frac{1}{N^3}(m' - m'')^2 N' N'' (N' + N'')$$

$$= \frac{(m' - m'')^2 N' N''}{N^2}.$$

Or $\mu_2 = \frac{\mu'_2}{n}$. Donc

$$\mu_2 = \frac{1}{n}\frac{N'}{N}\frac{N''}{N}(m' - m'')^2$$

8. — THÉORÈME VIII. *Le cube moyen des écarts entre les moyennes secondaires et leur moyenne est égal à la* $n^{\text{ième}}$ *partie de la fluctuation multipliée par la différence des nombres relatifs*

d'éléments de chaque groupe dans les séries primaires et par le cube de la différence des deux éléments de ces séries primaires.

Formons le cube moyen μ'_3 des écarts entre les éléments d'une série primaire et leur moyenne :

$$\mu'_3 = N'\left(m' - \frac{N'\,m' + N''\,m''}{N' + N''}\right)^3 + N''\left(m'' - \frac{N'\,m' + N''\,m''}{N' + N''}\right)^3$$

$$= \left[\frac{N'\,N''^3}{N^3}(m' - m'')^3 - \frac{N''\,N'^3}{N^3}(m' - m'')^3\right]$$

ou

$$\mu'_3 = \frac{N'\,N''}{N^3}(N''^2 - N'^2)(m' - m'')^3 =$$

$$= \frac{N'\,N''}{N^3}(N'' - N')(m' - m'')^3 = \frac{N'\,N''}{N^3}(N' - N'')(m'' - m')^3$$

Or, d'après le théorème II, du chapitre précédent, le cube moyen des écarts des moyennes secondaires est égal au cube moyen des écarts des moyennes primaires, divisé per le carré du nombre de séries c'est à dire que l'on a

$$\mu_3 = \frac{1}{n^2}\,\mu'_3 .$$

En conséquence

$$\mu_3 = \frac{N'\,N''}{n^2} \times \frac{N' - N''}{N^3}(m'' - m')^3 .$$

D'après le théorème VI, on simplifie cette expression en écrivant

$$\mu_3 = \frac{\mu_2}{n} \cdot \frac{N'\ \ N''}{N}(m'' - m') .$$

9. — Théorème VIII. - *Parmi les écarts des moyennes secondaires à partir de leur moyenne, l'écart qui se présente avec la même valeur le plus grand nombre de fois, autrement dit, l'écart le plus fréquent ou l'écart dominant* (1), *est compris entre deux limites dont l'une est le quotient de la fluctuation par la moyenne, la somme des deux limites étant égale au quotient de la moyenne cubique des écarts par la fluctuation.*

D'après le corollaire 2 du théorème IV (§ 6), le nombre des termes secondaires, qui contiennent r éléments d'un groupe et $n-r$ éléments d'un autre groupe, dont est composée chaque série primaire, est

(1) Appelé « mode » par Karl Pearson ; ce mot, en français, prêterait à confusion.

maximum quand r est compris entre

$$R_1 = \frac{n\,N'' - N'}{N} \qquad \text{et} \qquad R_2 = \frac{n\,N'' + N''}{N}.$$

Nous avons vu (théorème IV) que les moyennes secondaires varient de m' à m''; entre ces valeurs extrêmes leur fréquence passe par un maximum qui, quand r prend la valeur R ci dessus fixée, peut varier de R_1 à R_2.

Voyons maintenant quelle est la valeur correspondante de la moyenne secondaire. Un terme secondaire étant composé de $n - r$ éléments m' et r' éléments m'' a pour valeur

$$(n - r)\,m' + r\,m'' = n\,m' + r\,(m'' - m') = n\,m' + r\,a$$

a désignant la différence $m'' - m'$.

La moyenne secondaire correspondante en est la $n^{ième}$ partie, soit

$$m' + \frac{r\,a}{n}$$

La fréquence est maximum pour $r = R$, c'est à dire quand la moyenne secondaire a pour valeur

$$m' + \frac{R\,a}{n}$$

donc, quand sa valeur est comprise (corollaire 2 du théorème IV) entre

$$m' + \frac{n\,N'' - N'}{N} \cdot \frac{a}{n} \qquad \text{et} \qquad m' + \frac{n\,N'' + N''}{N} \cdot \frac{a}{n}.$$

Les expressions de ces deux limites ont une partie commune

$$m' + \frac{n\,N''\,a}{N\,n} = m' + \frac{N''\,a}{N}$$

Or, puisque $m'' - m' = a$

$$m' + \frac{N''\,a}{N} = \frac{m'\,N + m''\,N'' - m'\,N''}{N} = \frac{m'\,N' + m''\,N''}{N} = \mu'_1$$

en désignant par μ'_1 la moyenne des éléments de chaque série primaire. La fréquence maximum d'une moyenne secondaire correspond donc aux cas où cette moyenne a une valeur comprise entre

$$\mu'_1 - \frac{N'\,a}{N\,n} \qquad \text{et} \qquad \mu'_1 + \frac{N''\,a}{N\,n}$$

Désignons par d_1 la *déviation* (1) $\frac{N' a}{N n}$ à partir de la moyenne et par d_2 la déviation $\frac{N'' a}{N n}$, il s'agit de calculer

$$d_1 = \frac{N' a}{N n} \quad , \quad d_2 = - \frac{N'' a}{N n} .$$

D'après le théorème VII

$$\mu_2 = \frac{1}{n} \frac{N' N''}{N^2} a^2 = \mu'_1 \frac{N' a}{N n} = \mu'_1 d_1$$

$$\mu_3 = \mu_2 \frac{N' - N''}{N} \cdot \frac{a}{n} = \mu_2 \left(\frac{N' a}{N n} - \frac{N'' a}{N n} \right) = \mu_2 (d_1 + d_2)$$

Donc

$$\frac{\mu_2}{\mu'_1} = d_1 \qquad \frac{\mu_3}{\mu_2} = d_1 + d_2$$

égalités qui traduisent l'énoncé du théorème; d'où

$$d_2 = \frac{\mu_3}{\mu_2} - \frac{\mu_2}{\mu'_1}$$

Remarque. — On peut écrire l'expression de μ_3 d'après celle de μ_2, sous la forme suivante

$$\frac{\mu_3}{\mu_2} = \frac{N - 2 N''}{N} \cdot \frac{a}{n} = \frac{a}{n} - \frac{2 a}{n} \cdot \frac{N''}{N}$$

D'où

$$- \frac{a N''}{n N} = d_2 = \frac{\mu_3}{2 \mu_2} - \frac{a}{2 n}$$

et

$$\frac{a}{2 n} = \frac{\mu_3}{2 \mu_2} - \frac{\mu_3}{\mu_2} + \frac{\mu_2}{\mu'_1} = \frac{\mu_2}{\mu'_1} - \frac{\mu_3}{2 \mu_2}$$

Lorsque n est un très grand nombre $\frac{\mu_2}{\mu'_1} - \frac{\mu_3}{2 \mu_2}$ est une différence très petite, dont les deux termes sont presque égaux. S'ils étaient égaux on aurait

$$\frac{\mu_2}{\mu'_1} = \frac{\mu_3}{2 \mu_2}$$

---

(1) *Skewness*, suivant la terminologie de PEARSON qui a donné l'une des formules suivantes.

et les deux limites d_1 et d_2 seraient

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} \quad \text{et} \quad \frac{\mu_3}{\mu_2} - \frac{\mu_2}{\mu'_1} = \frac{\mu_3}{\mu_2} - \frac{\mu_3}{2\,\mu_2} = \frac{\mu_3}{2\,\mu_2} = \frac{\mu_2}{\mu'_1}$$

Elles seraient donc confondues.

D'ailleurs $\frac{\mu_3}{2\,\mu_2}$ est la demi-somme des limites de la déviation :

$$\frac{\mu_2}{\mu'_1} \quad \text{et} \quad \frac{\mu_3}{\mu_2} - \frac{\mu_2}{\mu'_1}$$

11. — Lorsqu'on a affaire à une série statistique que l'on peut supposer constituée comme l'est la série des moyennes secondaires, derivée de n séries primaires identiques, on peut utiliser les résultats precédents pour déterminer une valeur admissible de la moyenne dominante ou de la déviation. Pour qu'une telle valeur soit admissible, il faut que la déviation ne soit pas supérieure à la moyenne comptée à partir du point de départ de la série, sans cela la valeur dominante serait négative, c'est à dire, en dehors de la série des moyennes secondaires. On doit avoir

$$\frac{\mu_2}{\mu'_1} < \mu'_1 \qquad \text{et} \qquad \frac{\mu_3}{\mu_2} - \frac{\mu_2}{\mu'_1} < \mu'_1$$

Si aucune de ces inégalités n'est satisfaite, cela tient à ce que μ_2 et μ_3 sont très grands, μ_2 rélativement à μ'_1, μ_3 rélativement à μ_2.

Dans ce cas, on doit admettre que la déviation est égale à la moyenne et que la dominante est au point de départ de la série.

Pour donner un exemple de ce cas, reprenons la série des 26 ouvriers (1) et supposons que cette série soit transformée de façon à présenter une extreme inegalité. C'est à dire que 25 ouvriers sur 26 gagneraient chacun le minimum 4 francs, tandis que le 26ième ouvrier gagnerait 123f 60. Le total des salaires reste 223f 60, le salaire moyen μ'_1 également: $\mu'_1 = 8{,}6$. La fluctuation

$$\mu_2 = \frac{1}{26}(25 \times \overline{4{,}6}^2 + \overline{119}^2) = 5{,}65$$

Le cube moyen des écarts à la moyenne

$$\mu_3 = \frac{1}{26}(25 \times \overline{4{,}6}^3 + \overline{119}^3) = 64.720$$

$$\frac{\mu_3}{\mu_2} - \frac{\mu_2}{\mu'_1} = 48.9 \qquad \frac{\mu_2}{2\,\mu_2} = 57{,}25$$

(1) Considérée dans un chapitre antérieur à titre d'exemple pour l'étude de la variabilité à *l'intérieur* d'un ensemble.

Par suite

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{565}{8.6} = 65.6 \qquad \frac{\mu_3}{\mu_2} = \frac{64.720}{565} = 114.5$$

Ainsi les deux limites de la déviation sont supérieures à la moyenne, la valeur de la dominante serait négative ; on conviendra de la supposer nulle.

D'ailleurs, la série considérée ne peut être assimilée à une série issue de séries primaires, dans les conditions de l'analyse précédente, bien que pour des valeurs très petites du rapport $\frac{N'}{N''}$ on puisse obtenir une série secondaire, dont la dominante serait à l'origine même des mesures.

Supposons maintenant que la moyenne soit plus grande que l'une des deux limites, on conviendra d'adopter celle-ci pour caractériser la déviation.

Reprenons la série des 26 ouvriers telle qu'elle se présente effectivement. D'après les résultats calculés antérieurement:

$$\frac{\mu_2}{\mu'_1} = \frac{24.5}{8.6} = 2.86 \qquad \frac{\mu_3}{\mu_2} = \frac{7649.1}{637.8} = 12 \text{ environ}$$

$$\frac{\mu_3}{\mu_2} - \frac{\mu_2}{\mu'_1} = 9.7$$

la seconde limite dépasse la moyenne ; on adopte la première. La déviation a pour valeur 2.86, la dominante est $8.6 - 2\,86 = 5.74$.

Supposons, enfin, que la moyenne soit supérieure aux deux limites, alors il est expédient de prendre la demi-somme de ces limites, soit $\frac{\mu_3}{2\,\mu_2}$, quand elles sont voisines, c'est à dire quand leur somme est inférieure à la moyenne μ'_1 ; dans le cas contraire, on admettra comme déviation la plus petite des deux. Ainsi, quand les valeurs des éléments de la série sont symétriques par rapport à la moyenne, μ_3 est nul, les limites ont une somme nulle.

Dans ce cas, $\frac{N''}{N'}$ est égal à 1, $N'' = N'$. D'après le mode de formation des nombres T_r des moyennes secondaires de chaque valeur, les moyennes secondaires correspondantes à des valeurs de r équidistantes de R sont également nombreuses. Dans ce cas, la médiane, la moyenne et la dominante sont identiques.

12. — D'après le théorème VII la fluctuation des moyennes secondaires est

$$\mu_2 = \frac{1}{n} \frac{N' N''}{N} a^2$$

a étant l'amplitude de la variation.

Quand les valeurs des éléments m', m'' sont mesurés à partir de m', m' ayant alors une valeur nulle, $m'' = a$.

Telle est la fluctuation des moyennes secondaires obtenues par l'association de séries primaires, dont chacune comprend N' éléments égaux à 0, N'' éléments égaux à a. Les valeurs de ces moyennes secondaires s'échelonnent de 0 à na, s'il y a n séries et, pour chaque valeur de la moyenne ou pour chaque écart r de cette moyenne à partir du point de depart 0, la formule T_r donne la fréquence de cette moyenne.

Si l'on prend a pour unité d'estimation des moyennes secondaires, cela revient à considérer chaque série primaire composée des éléments 0 et 1, c'est à dire, comme la représentation d'une alternative : un fait se produit (1) ou ne se produit pas (0).

Si, dans l'expression de μ_2, on suppose $a = 1$ et si, pour simplifier l'écriture, on pose $\frac{N'}{N} = p$, $\frac{N''}{N} = q$, $p + q = 1$, l'expression de μ_2 devient

$$\mu_2 = \frac{p\,q}{n}$$

si σ est l'écart type, racine carrée de la fluctuation μ_2, on a

$$\sigma = \sqrt{\frac{p \times q}{n}}$$

Tel est l'écart type des moyennes secondaires. Un terme secondaire étant égal à n fois la moyenne des éléments dont il est composé, la fluctuation des termes secondaires est égale à

$$\sigma'^2 = n^2 \frac{p\,q}{n}$$

d'où l'écart type des termes secondaires

$$\sigma' = \sqrt{n\,p\,q}$$

Remarque. — Dans la première partie de cet article, on a supposé que les éléments de l'ensemble considéré étaient entièrement distincts. On peut admettre, comme cas particulier, que ces

éléments se répartissent en deux espèces, ceux d'une même espèce ayant tous la même valeur (cas de l'alternative). On peut alors substituer aux expressions données des fluctuations, celles qui conviennent au cas de l'alternative, d'après le paragraphe précédent.

13. — Si les éléments des deux espèces sont également nombreux, toute série de termes secondaires est symétrique quelque soit le nombre des séries primaires : médiane, moyenne et dominante sont confondues.

Les propositions précédentes permettent de calculer simplement l'écart moyen des termes secondaires, leur fluctuation ou leur écart type, le terme dominant, le rapport de l'écart type à l'écart moyen, quelque soit le nombre des séries primaires

La fluctuation $n \times \frac{N'}{N} \times \frac{N''}{N}$ est égale à $\frac{N}{4}$ quand

$$\frac{N'}{N} = \frac{N''}{N} = \frac{1}{2}$$

Pour les valeurs paires de n, la grandeur du terme dominant $T_n^{(R)}$ où $R = \frac{n}{2}$ se déduit d'abord de $T_{n-2}^{(R)}$ d'après la formule du corollaire 1 du § 6 :

$T_n^{(R)} = T_{n-2}^{(R)} \times 4 \frac{n-1}{n}$; d'où en multipliant toutes les égalités analogues pour $r = 0, 1, 2 \ldots (n-1)$

[1] $$T_n^{(R)} = 2^n \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \ldots \times \frac{n-1}{4} \right)$$

En vertu du même corollaire on calcule la somme E_n des écarts des termes de la série secondaire (pris positivement)

[2] $$E_n = T_{n-2}^{(R)} \times 4 E_{n-2}$$

Puis, combinant [1] et [2] et divisant par 2^n, nombre total des termes de la série, on obtient le double de l'écart moyen sous la forme :

$$2 E_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \ldots \times \frac{n-3}{n-2}$$

La somme de produits qui forme le second membre se calcule de

proche en proche et l'on obtient

$$[3] \quad 2E_n = \frac{3}{2} \times \frac{5}{4} \times \frac{7}{6} \times \ldots \times \frac{n-3}{n-4} \times \frac{n-1}{n-2} =$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \ldots \times \frac{n-3}{n-2} \times (n-1)$$

expression qui se présente sous deux formes et qui permet de calculer l'écart moyen plus simplement que par le calcul direct.

Enfin, pour déterminer le rapport de l'écart type à l'écart moyen ou le carré de ce rapport, on peut former le carré $4\,E^2_n$ de deux manières.

Ou bien élever au carré la première des deux formes [3] ce qui donne

$$4E^2_n = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 \left(1+\frac{1}{4}\right)^2 \times \ldots \times \left(1+\frac{1}{n-4}\right)^2 \left(1+\frac{1}{n-2}\right)^2$$

$$= \left(1+\frac{2}{2}+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{2}{4}+\frac{1}{16}\right) \times \ldots$$

$$\ldots \times \left(1+\frac{2}{n-4}+\frac{1}{(n-4)^2}\right)\left(1+\frac{2}{n-2}+\frac{1}{(n-2)^2}\right)$$

Ou bien égaler à $4\,E^2_n$ le produit des deux formes [3], ce qui fournit l'égalité :

$$4E^2_n = \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\ldots$$

$$\ldots \left(1+\frac{1}{n-2}\right)\left(1-\frac{1}{n-2}\right)(n-1)$$

D'où l'on déduit les inégalités

$$\left(1+1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{2}{4}+\frac{1}{16}\right)\left(1+\frac{2}{6}+\frac{1}{36}\right) \times$$

$$\times \left(1+\frac{2}{8}\right)\left(1+\frac{2}{10}\right)\ldots\left(1+\frac{2}{n-2}\right) < 4\,E^2_n < \left(1-\frac{1}{4}\right)$$

$$\left(1-\frac{1}{16}\right)\left(1-\frac{1}{36}\right)\left(1-\frac{1}{64}\right) \times n$$

qui se réduisent aux suivantes

$$\frac{9}{4} \times \frac{25}{16} \times \frac{49}{36} \times \frac{n}{8} < 4\,E^2_n < \frac{3}{4} \times \frac{15}{16} \times \frac{35}{36} \times \frac{63}{64}\,n$$

Et comme, dans le cas particulier considéré, on a $\mu_2 = \frac{n}{4}$ ou $n = 4\ \mu_2$

on obtient finalement

$$\frac{9 \times 25 \times 49}{4 \times 16 \times 36 \times 8} < \frac{4\,n^2}{\mu_2} < \frac{3 \times 15 \times 35 \times 63}{4 \times 16 \times 36 \times 64}$$

ou, en extrayant la racine carrée d'une part

$$\frac{\sqrt{\mu_2}}{2\,n} < \frac{96\sqrt{2}}{105} < 1{,}29$$

d'autre part

$$\frac{\sqrt{\mu_2}}{2\,n} > \frac{2 \times 4 \times 6 \times 8}{3^2 \times 5 \times 7} \text{ ou } \frac{384}{315} > 1{,}21$$

On peut adopter comme valeur du rapport la demi somme de ces deux nombres : 1,25 et calculer ainsi l'écart type d'après l'écart moyen lorsque celui-ci est connu, ou inversement et quand la distribution effective des éléments numériques se conforme suffisamment à celle du schéma théorique de moyennes secondaires issues de séries primaires composées de deux éléments distincts (alternative).

E. J. Gumbel.

Eine Beziehung zwischen Fehlermassen.

1. Fragestellung. — 2. Die gleichmässige Verteilung. — 3. Eine transformierte Gaussische Verteilung. — 4. Maxwells Verteilung. — 5. Plancks Strahlungsgesetz. — 6. Die abgekürzte Bruhns'sche Reihe. — 7. Principielle Betrachtung zum Gültigkeitsbereich.

Unter einer Verteilung verstehen wir eine Regel, welche die zu den Werten einer unabhängigen statistischen Veränderlichen gehörigen Wahrscheinlichkeiten oder relativen Häufigkeiten angibt. Ist die unabhängige Veränderliche stetig, so enthält die Verteilung die zugehörigen Wahrscheinlichkeitsdichten. Als Fehler werden die Abweichungen dieser Veränderlichen von ihrem Erwartungswert bezeichnet. Kommen in einer Verteilung nur die Fehler, also nicht die Werte der Veränderlichen selbst vor, so spricht man von einem Fehlergesetz. Als Fehlermass bezeichnet man den Erwartungswert einer Funktion aller Fehler. Als solche Funktion wird am häufigsten die Summe der absoluten Beträge und der Quadrate der Fehler verwendet. Die entsprechenden Fehlermasse heissen durchschnittlicher Fehler bezw. Streuung. Die Quadratwurzel aus der Streuung wird als mittlerer Fehler bezeichnet. Für die wichtigste Verteilung, das Gauss'sche Fehlergesetz, ist eine Beziehung zwischen diesen Grössen längst bekannt. Hierfür ist nämlich der durchschnittliche Fehler dividiert durch das Produkt aus der Wahrscheinlichkeitsdichte des Mittelwerts und die Streuung gleich zwei. Dieser Satz wird im folgenden die « normale Fehlerbeziehung » genannt.

Für andere Verteilungen, nämlich die de Forest'sche, (die Pearson'sche Verteilung Nr. III) und die hierin als Spezialfall enthaltene Helmert'sche und die exponentielle Verteilung, ferner für das symmetrisch-lineare Fehlergesetz und die Poisson'sche Verteilung hat

L. von Bortkiewicz (*) gezeigt, dass hierfür ebenfalls die normale Fehlerbeziehung gilt. Für die Pearson'schen Verteilungen Nr. I und Nr. II und die Bernoulli'sche Verteilung dagegen gilt sie nur angenähert.

Im folgenden soll das Zutreffen dieser Beziehung für eine Reihe weiterer Verteilungen, nämlich die gleichmässige Verteilung, eine aus dem Gauss'schen Fehlergesetz durch eine Transformation entstehende Verteilung, die Maxwell'sche Verteilung, das Planck'sche Strahlungsgesetz und die in der Kollektivmasslehre übliche abgekürzte Bruhns'sche Reihe nachgeprüft werden. Im Anschluss an diese Beispiele werden wir dann zu einigen allgemeinen Sätzen gelangen.

Der praktische Wert der normalen Fehlerbeziehung besteht darin, dass man mit ihrer Hilfe aus der Kenntnis der Streuung und der Wahrscheinlichkeitsdichte des Mittelwerts den in der Praxis umständlich zu berechnenden durchschnittlichen Fehler, allgemein aus zwei dieser Werte den dritten ermitteln kann.

Bezeichnet man die unabhängige Veränderliche mit x, die Wahrscheinlichkeit, dass sie zwischen x und $x + dx$ liegt, oder die entsprechende relative Häufigkeit mit $\varphi(x)\, dx$, die obere bezw. untere Grenze des Variationsbereichs mit $-c_1$ bezw. $+c_2$, so gilt zunächst infolge der Definition der Wahrscheinlichkeit

$$\int_{-c_1}^{c_2} \varphi(x)\, dx = 1 \qquad [1]$$

Der Ausdruck $\varphi(x)$ hängt ausser von x meistens noch von einigen Konstanten, den sogenannten Verteilungskonstanten, ab.

Das arithmetische Mittel oder der Erwartungswert, im folgenden mit $\bar{x}$ bezeichnet, ist definiert durch

$$\bar{x} = \int_{-c_1}^{c_2} x\, \varphi(x)\, dx \qquad [2]$$

Seine Wahrscheinlichkeitsdichte beträgt also $\varphi(\bar{x})$. Als durchschnittlichen Fehler ϑ definiert man

$$\vartheta = \int_{-c_1}^{c_2} |x - \bar{x}|\, \varphi(x)\, dx \qquad [3]$$

(*) «Sitzungsberichte der Berliner mathematischen Gesellschaft», Febr. 1923 p. 21-32.

Als Streuung μ_2^2 endlich bezeichnet man

$$\mu_2^2 = \int_{-c_1}^{c_2} (x - \bar{x})^2 \varphi(x)\, dx \qquad [4]$$

Dann soll nachgeprüft werden, ob für diese Verteilungen

$$\vartheta = \text{const}\, \mu_2^2\, \varphi(\bar{x}) \qquad [5]$$

insbesondere ob

$$\vartheta = 2\, \mu_2^2\, \varphi(\bar{x}) \qquad [51]$$

Da $\varphi(x)\, dx$ als Wahrscheinlichkeit eine reine Zahl, gilt dimensional

$$\varphi(\bar{x}) = [x^{-1}]$$

wogegen

$$\mu_2^2 = [x^2]$$

Das Produkt dieser beiden Grössen hat also dieselbe Dimension wie

$$\vartheta = [x]$$

Die Beziehung [5] ist selbstverständlich, wenn diese Konstante selbst wieder von den in der Verteilung auftretenden Konstanten abhängt. Denn ϑ, μ_2 und $\varphi(\bar{x})$ hängen von den Konstanten der Verteilung, wozu auch die Grenzen zu rechnen sind, ab. Also gilt dasselbe auch von

$$\frac{\mu_2^2\, \varphi(\bar{x})}{\vartheta}$$

Die Besonderheit des Satzes besteht darin, dass diese Konstante bei den untersuchten Verteilungen einen numerischen Wert hat, also unabhängig von den Werten der Kurvenkonstanten ist, und dass dieser numerische Wert vielfach in der Nähe von 2 liegt.

Zur Nachprüfung werden wir die Formeln für die Fehlermasse etwas vereinfachen. Zunächst ist

$$\vartheta = -\int_{-c_1}^{\bar{x}} x\, \varphi(x)\, dx + \bar{x} \int_{-c_1}^{\bar{x}} \varphi(x)\, dx + \int_{\bar{x}}^{c_2} x\, \varphi(x)\, dx - \bar{x} \int_{\bar{x}}^{c_2} \varphi(x)\, dx$$

Dies wird, wenn man die Integrale über den ganzen Variationsbereich erstreckt und die entsprechenden Subtraktionen vornimmt, unter Berücksichtigung von [1] und [2] zu

$$\vartheta = -\bar{x} + 2 \int_{\bar{x}}^{c_2} x\, \varphi(x)\, dx + \bar{x} - 2\bar{x} \int_{\bar{x}}^{c_2} \varphi(x)\, dx$$

sodass

$$\vartheta = 2 \int_{\bar{x}}^{c_2} (x - \bar{x})\, \varphi(x)\, d\, x \qquad [311]$$

Führt man den Fehler $x - \bar{x} = z$ als Integrationsvariable ein, so wird, wenn die neue Verteilung $\psi(z)$ heisst,

$$\vartheta = 2 \int_{0}^{c_2 - \bar{x}} z\, \psi(z)\, d\, z \qquad [312]$$

In manchen Fällen ist es praktischer, den durchschnittlichen Fehler durch ein Integral auszudrücken, das von der unteren Grenze bis zum Mittelwert geht. Dies geschieht durch Erweiterung des Integrationsbereichs beim Ausdruck [311], sodass

$$\vartheta = 2 \int_{-c_1}^{\bar{x}} (\bar{x} - x)\, \varphi(x)\, d\, x \qquad [313]$$

Ebenso erhält man für die Streuung unter Berücksichtigung von [1] und [2] den bekannten Satz

$$\mu_2{}^2 = \int_{-c_1}^{c_2} x^2\, \varphi(x)\, d\, x - \bar{x}^2 \qquad [41]$$

Bei den in der Praxis vorkommenden Verteilungen ist die Bedingung 1) meist nicht erfüllt, weil die $\varphi(x)$ nicht als relative, sondern als absolute Häufigkeiten gegeben sind. Dann müssen zuerst die auftretenden Konstanten entsprechend bestimmt werden. Hierdurch vermindert sich meist ihre Zahl. Eine weitere Verminderung oder zum mindesten eine Erkenntnis der Natur der übrigen Konstanten erhält man, indem man das arithmetische Mittel und die Streuung berechnet und die Konstanten durch sie ausdrückt, wenn dies in expliciter Form möglich ist. Wir werden unsere Untersuchung, soweit dies möglich, stets an den so normierten Verteilungen vornehmen.

Diese Betrachtungsweise ist nicht auf Verteilungen im Sinne der Wahrscheinlichkeitstheorie beschränkt. Sie lässt sich auch ausdehnen auf unabhängige Veränderliche x, denen bestimmte abhängige Veränderliche $\varphi(x)$ zugeordnet sind. Dabei ist vorausgesetzt, dass x die ganze oder einen Teil der Menge der reellen Zahlen durchläuft, dass $\varphi(x)$ stets positiv und dass die genannten Integrale existieren. Auch diese Funktionen werden wir zuerst normieren.

Zum Beweis des Satzes für die uns interessierenden Verteilungen benötigen wir einige Gauss'sche Integrale, die zunächst abgeleitet werden sollen.

Man definiere

$$\int_0^{\alpha} e^{-h^2 x^2} x^{2k} \, dx = I(2k)$$

wobei $k \geqq 1$ eine ganze Zahl. Dann ist, wenn $h x = u$ gesetzt wird,

$$I(2k) = \frac{-1}{2 h^{2k+1}} \int_0^{\alpha h} u^{2k-1} D e^{-u^2} = -\frac{\alpha^{2k-1} h^{2k-1} e^{-\alpha^2 h^2}}{2 h^{2k+1}} +$$

$$+ \frac{(2k-1) h^{2k-1}}{2 h^{2k+1}} \int_0^{\alpha} x^{2k-2} e^{-h^2 x^2} \, dx$$

sodass

$$I(2k) = -\frac{e^{-\alpha^2 h^2} \alpha^{2k-1}}{2 h^2} + \frac{2k-1}{2 h^2} I(2k-2)$$

Hieraus lässt sich $I(2k)$ berechnen, denn ebenso ist

$$I(2k-2) = -\frac{e^{-\alpha^2 h^2} \alpha^{2k-3}}{2 h^2} + \frac{2k-3}{2 h^2} I(2k-4)$$

. . . . . .

$$I(2) = \frac{-e^{-\alpha^2 h^2} \alpha}{2 h^2} + \frac{1}{2 h^2} I(0)$$

während

$$I(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2 h} \Phi(\alpha h)$$

wobei

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x} e^{-z^2} \, dz$$

das bekannte Gauss'sche Integral. Multipliziert man diese Gleichungen von der Gleichung für $I(2k-2)$ angefangen, der Reihe nach mit

$$\frac{2k-1}{2 h^2}; \ldots\ldots \frac{(2k-1) \ldots 3}{2^{k-1} h^{2k-2}}; \frac{(2k-1) \ldots 3.1}{2^k h^{2k}}$$

und summiert man sämmtliche Gleichungen von der für $I(2k)$ angefangen, so fallen alle Integrale weg und man erhält

$$\int_0^\alpha e^{-h^2x^2} x^{2k}\, dx = \frac{1.3\ldots(2k-1)\sqrt{\pi}}{2^{k+1}h^{2k+1}}\,\Phi(\alpha h) -$$

$$-\frac{e^{-\alpha^2h^2}}{2h^2}\left(\alpha^{2k-1} + \frac{2k-1}{2h^2}\alpha^{2k-3} + \ldots \frac{(2k-1)\ldots 3.1\alpha}{2^{k-1}h^{2k-2}}\right) \quad [61]$$

Ebenso definiere man

$\int_0^\alpha e^{-h^2x^2} x^{2k+1}\, dx = I(2k+1)$; wobei $k \geqq 1$ wieder eine ganze

Zahl, so wird entsprechend

$$I(2k+1) = \frac{-e^{-\alpha^2h^2}\alpha^{2k}}{2h^2} + \frac{k}{h^2} I(2k-1)$$

ebenso

$$I(2k-1) = -\frac{e^{-\alpha^2h^2}\alpha^{2k-2}}{2h^2} + \frac{k-1}{h^2} I(2k-3)$$

. . . . . .

$$I(3) = \frac{-e^{-\alpha^2h^2}\alpha^2}{2h^2} + \frac{1}{h^2} I(1)\ ,$$

während

$$I(1) = \int_0^\alpha e^{-h^2x^2} x\, dx = -\frac{e^{-\alpha^2h^2}}{2h^2} + \frac{1}{2h^2}$$

Multipliziert man diese Gleichungen, mit der Gleichung für $I(2k-1)$ angefangen, der Reihe nach mit

$$\frac{k}{h^2}\ ;\ \ldots\ldots \frac{k(k-1)\ldots 2}{h^{2k-2}}\ ;\ \frac{k(k-1)\ldots 2.1}{h^{2k}}$$

und summiert man sämtliche, von der für $I(2k+1)$ angefangen, so wird

$$\int_0^\alpha e^{-h^2x^2} x^{2k+1}\, dx = \frac{k!}{2h^{2k+2}} - \frac{e^{-\alpha^2h^2}}{2h^2}\left(\alpha^{2k} + \frac{k!\,\alpha^{2k-2}}{(k-1)!\,h^2} + \ldots - \frac{k!\,\alpha^2}{h^{2k-2}} + \frac{k!}{h^{2k}}\right)$$

Im Spezialfall $a = \infty$ erhält man die bekannten Formeln

$$\int_0^\infty e^{-h^2 x^2} x^{2k}\, dx = \frac{1.3 \ldots (2k-1)\sqrt{\pi}}{2^{k+1} h^{2k+1}} \qquad [611]$$

und

$$\int_0^\infty e^{-h^2 x^2} x^{2k+1}\, dx = \frac{k!}{2 h^{2k+2}} \qquad [621]$$

2. — Zunächst betrachten wir die einfachste, gleichmässige Verteilung. Für sie ist

$$\varphi(x) \begin{cases} = \text{const}; & \text{solange } -c_1 \leqq x \leqq c_2 \\ = 0 & ; \text{ wenn } x \text{ ausserhalb dieses Bereichs.} \end{cases}$$

Damit [1] gilt, muss innerhalb des Variationsbereichs

$$\varphi(x) = \frac{1}{c_1 + c_2} \qquad [12]$$

Das arithmetische Mittel beträgt

$$\bar{x} = \frac{c_2 - c_1}{2} \qquad [22]$$

Die Streuung wird nach [41]

$$\mu_2^2 = \frac{c_2^3 + c_1^3}{3(c_1 + c_2)} - \frac{(c_2 - c_1)^2}{4} = \frac{(c_1 + c_2)^2}{12} \qquad [42]$$

Also wird

$$2\,\mu_2^2\,\varphi(\bar{x}) = \frac{c_1 + c_2}{6}$$

Der durchschnittliche Fehler beträgt nach (312)

$$\vartheta = \frac{2}{c_1 + c_2} \int_0^{\frac{c_1 + c_2}{2}} z\, dz = \frac{c_1 + c_2}{4} \qquad [32]$$

Die uns interessierende Relation weist also keine der Konstanten der Verteilung mehr auf und gilt in der Form

$$\vartheta = 3\,\mu_2^2\,\varphi(\bar{x}) \qquad [52]$$

3. — Wir betrachten ferner die aus dem Gauss'schen Fehlergesetz durch eine logarithmische Transformation der unabhängigen Veränderlichen entstehende Verteilung

$$\varphi(\xi) = y_m \, e^{-\frac{1}{4b^2} lg^2 \frac{\xi + c_1}{\xi_m + c_1}} \qquad [13]$$

wobei ξ die unabhängige Veränderliche, ξ_m die Mode, $c_2 = \infty$ und $\frac{1}{2b}$ eine Konstante bedeutet, welche eine ähnliche Rolle spielt, wie die Präzision bei der normalen Verteilung. Hierbei ist, wie früher (*) gezeigt,

$$y_m = \frac{e^{-b^2}}{2b\sqrt{\pi}(\xi_m + c_1)},$$

$$\bar{\xi} = (\xi_m + c_1) e^{3b^2} - c_1, \qquad [23]$$

$$\mu_2^2 = (\xi_m + c_1)^2 e^{6b^2} (e^{2b^2} - 1) \qquad [43]$$

und

$$\varphi(\bar{\xi}) = \frac{e^{-b^2}}{2b\sqrt{\pi}(\xi_m + c_1)} \, e^{-\frac{1}{4b^2} lg^2 \frac{\bar{\xi} + c_1}{\xi_m + c_1}}$$

Dies wird nach [23] zu

$$\varphi(\bar{\xi}) = \frac{e^{-\frac{13}{4} b^2}}{2b\sqrt{\pi}(\xi_m + c_1)}$$

Man bilde nunmehr

$$2\mu_2 \varphi(\bar{\xi}) = \frac{1}{b\sqrt{\pi}} (\xi_m + c_1) e^{\frac{11}{4} b^2} (e^{2b^2} - 1)$$

Dagegen ist der durchschnittliche Fehler nach [311], [13] und [23]

$$\vartheta = 2 y_m \int_{\bar{\xi}}^{\infty} [\xi + c_1 - (\xi_m + c_1) e^{3b^2}] e^{-\frac{1}{4b^2} lg^2 \frac{\xi + c_1}{\xi_m + c_1}} d\xi$$

Führt man die Transformation

$$\frac{\xi + c_1}{\xi_m + c_1} = e^{2b(hx + b)}$$

(*) Vgl. *Über ein Verteilungsgesetz*, « Zeitschrift. f. Physik », Bd. 37, H. 6, S. 469-480.

ein, wobei x eine neue unabhängige Veränderliche, so ergibt sich die untere Grenze x_0 des Integrals nach [23] aus

$$e^{3b^2} = e^{2b^2+2bhx_0}$$

Sie lautet also

$$x_0 = \frac{b}{2h}$$

Daher wird, da $d\xi = (\xi_m + c_1)\, e^{2b(hx+b)}\, 2bh\, dx$

$$\vartheta = 2\, y_m\, (\xi_m + c_1)^2\, 2h\, b \left(\int_{\frac{b}{2h}}^{\infty} e^{2b(hx+b)-(hx+b)^2+2b(hx+b)}\, dx - \right.$$

$$\left. - \int_{\frac{b}{2h}}^{\infty} e^{3b^2-(hx+b)^2+2b(hx+b)}\, dx \right)$$

oder nach Einführung der obigen Werte für das Maximum

$$\vartheta = e^{3b^2}(\xi_m + c_1) \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{b}{2h}}^{\infty} e^{-b^2+2hbx-h^2x^2}\, d(hx) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{b}{2h}}^{\infty} e^{-h^2x^2}\, d(hx) \right)$$

Setzt man im ersten Integral $b - h\,x = z$, im zweiten $h\,x = z$, so wird, wenn man im ersten Integral entsprechend dem Vorzeichenwechsel die Integrationsfolge vertauscht,

$$\vartheta = e^{3b^2}(\xi_m + c_1) \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{b}{2}} e^{-z^2}\, dz - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{b}{2}}^{\infty} e^{-z^2}\, dz \right)$$

sodass man auf Grund des bekannten normalen Fehlerintegrals erhält

$$\vartheta = 2\, e^{3b^2}(\xi_m + c_1)\, \Phi\left(\frac{b}{2}\right) \qquad [33]$$

Speziell ergibt sich für $c_1 = 0$ und $\xi_m = e^{-2b^2}$, wenn man setzt $\frac{1}{2b} = h$, der durchschnittliche Fehler des auf der Annahme des geometrischen Mittels als wahrscheinlichstem Wert aufgebauten Galton'schen Fehlergesetzes

$$\vartheta = 2\, e^{\frac{1}{4h^2}}\, \Phi\left(\frac{1}{4h}\right) \qquad [331]$$

Andrerseits ergibt sich für das gleichzeitige Bestehen von $c_1 = \infty$ $b = 0$, und $\xi_m + c_1 = \frac{1}{2\,h\,b}$ der Gauss'sche Wert

$$\vartheta = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \frac{2\int_0^{\frac{b}{2}} e^{-z^2}\,dz}{b} = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \qquad [332]$$

Der Ausdruck [33] soll nun übereinstimmen mit dem oben berechneten

$$2\,\mu_2{}^2\,\varphi(\bar{\xi}) = \frac{1}{b\sqrt{\pi}}(\xi_m + c_1)\,e^{\frac{11}{4}b^2}(e^{2b^2} - 1)$$

Demnach soll

$$\frac{e^{2b^2} - 1}{b\sqrt{\pi}}\,e^{-\frac{b^2}{4}} = 2\,\Phi\left(\frac{b}{2}\right) \qquad [53]$$

sein. Das Zutreffen der normalen Fehlerbeziehung hängt also hier ab von der Grösse der Konstanten b. Sie gilt exakt für $b = 0$, da hierfür beide Ausdrücke gleich null werden. Dies entspricht dem bekannten normalen Fall. Ebenso gilt dies für sehr kleine Werte von b. Praktisch ist b für die durch diese Formel darstellbaren Verteilungen etwa von der Grössenordnung $0{,}227 + 0{,}105\ \varepsilon$, wobei $\varepsilon^2 << 1$. Entwickelt man in [53] auf beiden Seiten, wobei man 4te und höhere Potenzen von b vernachlässigt, so erhält man für die linke Seite

$$\frac{2b + 2b^3}{\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{b^2}{4}\right) = \frac{2b}{\sqrt{\pi}}\left(1 + \frac{3b^2}{4}\right)$$

und auf der rechten Seite

$$\frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{b}{2}}(1 - z^2)\,dz = \frac{2b}{\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{b^2}{12}\right)$$

Solange also $b^2 << 1$, werden beide Seiten gleich $\frac{2b}{\sqrt{\pi}}$ und die normale Fehlerbeziehung (51) ist erfüllt. Wenn erst $b^4 << 1$, wird der Quotient der beiden uns interessierenden Grössen anstelle 1 zu

$$\frac{2\,\mu_2{}^2\,\varphi(\bar{\xi})}{\vartheta} = 1 + \frac{10}{12}\,b^2$$

Dann ist die normale Fehlerbeziehung mit einem Fehler von höchstens 5 % erfüllt. Die Relation bleibt also bei dieser Transformation der unabhängigen Veränderlichen nicht erhalten.

4. — Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Gasmolekül eine Geschwindigkeit zwischen x und $x + dx$ besitzt, ist nach Maxwell proportional mit

$$\varphi(x) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k T}\right)^{3/2} x^2 e^{-\frac{m x^2}{2 k T}}$$

Dabei ist m die Masse eines Moleküls, k die Boltzmann'sche Konstante und T die absolute Temperatur. Man berechne zunächst die mittlere Geschwindigkeit $\bar{x}$ nach [2] als

$$\bar{x} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{m}{k T}\right)^{3/2} \int_0^\infty x^3 e^{-\frac{m x^2}{2 k T}} dx \quad ,$$

so erhält man aus (621) für $k = 1$, $h^2 = \frac{m}{2 k T}$

$$\bar{x} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{m}{k T}\right)^{3/2} \frac{1}{2} \frac{4 k^2 T^2}{m^2} = \sqrt{\frac{8}{\pi} \frac{k T}{m}} \qquad [24]$$

Setzt man diesen Wert in die Verteilung ein, so erhält man die normierte Maxwell'sche Formel

$$\varphi(x) = \frac{32}{\pi^2 \bar{x}^3} x^2 e^{-\left(\frac{2x}{\sqrt{\pi}\bar{x}}\right)^2} \qquad [14]$$

Genau wie die Gauss'sche Kurve allein durch den mittleren Fehler, so ist die Maxwell'sche Kurve allein durch den Mittelwert bestimmt. Man erhält nunmehr für die Streuung nach [41]

$$\mu^2_2 = -\bar{x}^2 + \frac{32}{\pi^2 \bar{x}^3} \int_0^\infty e^{-\left(\frac{2x}{\sqrt{\pi}\bar{x}}\right)^2} x^4 dx$$

Dies wird nach (611) für $k = 2$ und $h = \frac{2}{\sqrt{\pi}\bar{x}}$

$$\mu^2_2 = -\bar{x}^2 + \frac{32}{\pi^2 \bar{x}^3} \frac{3\sqrt{\pi}}{8} \left(\frac{\sqrt{\pi}\bar{x}}{2}\right)^5$$

oder

$$\mu_2{}^2 = \bar{x}^2 \left(\frac{3\pi}{8} - 1\right) \qquad [44]$$

Berechnet man noch die Wahrscheinlichkeitsdichte des Mittelwerts so wird nach [24] und [14]

$$2\,\mu_2{}^2\,\varphi(\bar{x}) = \frac{8\bar{x}}{\pi^2} e^{-\frac{4}{\pi}} (3\pi - 8)$$

Dies ist zu vergleichen mit dem durchschnittlichen Fehler.

Da der Variationsbereich der Maxwell'schen Verteilung von 0 bis ∞ reicht, so wird nach [313]

$$\vartheta = \frac{64}{\pi^2 \bar{x}^2} \int_0^{\bar{x}} x^2 e^{-\left(\frac{2x}{\sqrt{\pi}\,\bar{x}}\right)^2} dx - \frac{64}{\pi^2 \bar{x}^3} \int_0^{\bar{x}} x^3 e^{-\left(\frac{2x}{\sqrt{\pi}\,\bar{x}}\right)^2} dx$$

Dies wird nach [61] und [62] für $k = 1$; $h = \frac{2}{\sqrt{\pi}\,\bar{x}}$; $a = \bar{x}$

zu

$$\vartheta = \frac{64}{\pi^2 \bar{x}^2} \left(\frac{\pi^2 \bar{x}^3}{4.8} \Phi\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right) - \frac{e^{-\frac{4}{\pi}} \pi \bar{x}^3}{2.4} - \frac{\pi^2 \bar{x}^3}{2.16} + \right.$$
$$\left. + \frac{e^{-\frac{4}{\pi}} \pi \bar{x}^3}{2.4} + \frac{e^{-\frac{4}{\pi}} \pi^2 \bar{x}^3}{2.4.4} \right),$$

sodass

$$\vartheta = 2\bar{x} \left(e^{-\frac{4}{\pi}} + \Phi\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right) - 1 \right) \qquad [34]$$

Für die Maxwellsche Verteilung ist demnach die normale Beziehung unabhängig von den auftretenden Konstanten und sie ist mit der Genauigkeit des Rechenschiebers erfüllt. In der Tat beträgt

$$\frac{4}{\pi^2} e^{-\frac{4}{\pi}} (3\pi - 8) = 0{,}1616$$

wogegen

$$e^{-\frac{4}{\pi}} + \Phi\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right) - 1 = 0{,}1691$$

Der Fehler beträgt also wieder etwa 4 $^1/_2$ %.

5. — Das Planck' sche Strahlungsgesetz wird gewöhnlich geschrieben in der Form

$$R(\nu) = \frac{h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

dabei bedeutet R_ν die Intensität der Energiestrahlung für die Schwingungszahl ν. Die vier Konstanten h, k, T, c bedeuten jeweils das Elementarquantum, die Boltzmann'sche Konstante, die Temperatur und die Lichtgeschwindigkeit. Um die relative Intensität der Energie zu erhalten, um also dieses Gesetz auf die Form einer Verteilung zu bringen, berechne man die gesamte Energie K. Sie ist für gewöhnliche unpolarisierte Strahlen

$$K = 2 \int_0^\infty R(\nu)\, d\nu$$

Führt man als Integrationsvariable $x = \frac{h\nu}{kT}$ ein, so wird

$$K = \frac{2 k^4 T^4}{c^2 h^3} \int_0^\infty \frac{x^3\, dx}{e^x - 1}$$

Entwickelt man den Nenner, so erhält man, wenn n der Summationsindex und $nx = z$ eine neue Integrationsvariable

$$K = \frac{2 k^4 T^4}{c^2 h^3} \sum_1^\infty \frac{1}{n^4} \int_0^\infty z^3 e^{-z}\, dz$$

Zur Auswertung dieser und kommender ähnlicher Integrale benötigen wir die aus der Theorie der Bernoulli'schen Zahlen bekannten Formeln

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^5} = \frac{\pi^5}{295{,}1215}$$

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

Setzt man in den Ausdruck für die gesamte Energie den Wert der Gamma-Funktion und der Summe ein, so erhält man

$$K = \frac{2}{15} \frac{k^4 T^4 \pi^4}{c^2 h^3}$$

Daher gilt für die relative Energieverteilung über das Normalspektrum, welche wir mit $\varphi(\nu)\, d\nu$ bezeichnen,

$$\varphi(\nu) = \frac{15\, h}{\pi^4 k T} \cdot \frac{h^3 \nu^3}{k^3 T^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

Da die gesamte Energie gleich dem doppelten Wert des von 0 bis ∞ zu nehmenden Integrals, haben wir hier noch den multiplikativen Faktor 2 hinzugefügt. Die mittlere Schwingungszahl wird unter Verwendung der gleichen Integrationsvariablen

$$\bar{\nu} = \frac{15}{\pi^4} \frac{kT}{h} \int_0^\infty \frac{x^4\, dx}{e^x - 1}$$

Man entwickelt wieder den Nenner, führt die Integrationsvariable z ein, verwendet den Wert der Gammafunktion und der Summe, so wird

$$\bar{\nu} = \frac{15}{\pi^4} \frac{kT}{h} \cdot \frac{24\,\pi^5}{295{,}1215} = 1{,}21983 \frac{\pi\, k\, T}{h} \qquad [25]$$

Setzt man den so gewonnenen Mittelwert in die Verteilung ein, so bekommt man das PLANCK'sche Strahlungsgesetz in der normierten Form

$$\varphi(\nu) = \frac{15 \cdot \sigma^4\, \nu^3}{\bar{\nu}^4} \frac{1}{e^{\frac{\sigma \pi \nu}{\bar{\nu}}} - 1} \qquad [15]$$

Diese Form enthält also nur mehr die mittlere Schwingungszahl $\bar{\nu}$ und die ein für alle mal bestimmte dimensionslose Konstante $\sigma = 1{,}21983$. Zur Verwendung dieser Verteilung ist also nur mehr die Kenntnis der mittleren Schwingungszahl erforderlich. Die Wahrscheinlichkeitsdichte des Mittelwerts wird

$$\varphi(\bar{\nu}) = \frac{15 \cdot \sigma^4}{\bar{\nu}} \frac{1}{e^{\sigma\pi} - 1} = \frac{0{,}73534}{\bar{\nu}}$$

Die Streuung wird nach [41] wenn man wieder die Integrationsvariable $x = \frac{\sigma \pi \nu}{\bar{\nu}}$ einführt,

$$\mu_2^{\,2} = \frac{15\, \bar{\nu}^2}{\pi^6\, \sigma^2} \int_0^\infty \frac{x^5\, dx}{e^x - 1} - \bar{\nu}^2$$

Dies wird genau wie oben zu

$$\mu_2^{\,2} = \frac{15\, \bar{\nu}^2}{\pi^6\, \sigma^2} \cdot \frac{5!\,\pi^6}{945} - \bar{\nu}^2 = 0{,}2811\, \bar{\nu}^2 \qquad [45]$$

Demnach wird

$$2\, \mu_2^{\,2}\, \varphi(\bar{\nu}) = 0{,}4132\, \bar{\nu}$$

Der durchschnittliche Fehler wird nach [311], wenn man wieder die Integrationsvariable x einführt

$$\vartheta = \frac{30\,\bar{\nu}}{\sigma\,\pi^5}\int_{\sigma\pi}^{\infty}\frac{x^4 dx}{e^x-1} - \frac{30\,\bar{\nu}}{\pi^4}\int_{\sigma\pi}^{\infty}\frac{x^3\,dx}{e^x-1}$$

Entwickelt man den Nenner, so wird dies zu

$$\vartheta = \frac{30\,\bar{\nu}}{\sigma\,\pi^5}\,\Sigma\,\frac{1}{n^5}\int_{\sigma n\pi}^{\infty} z^4\,e^{-z}\,dz - \frac{30\,\bar{\nu}}{\pi^4}\,\Sigma\,\frac{1}{n^4}\int_{\sigma n\pi}^{\infty} z^3\,e^{-z}\,dz$$

Für die hier auftretenden unvollständingen Gammafunktionen gilt aber

$$\int_{n\sigma\pi}^{\infty} z^4\,e^{-z}\,dz = e^{-n\sigma\pi}(24 + 24\,n\sigma\pi + 12\,n^2\sigma^2\pi^2 + 4\,n^3\sigma^3\pi^3 + n^4\sigma^4\pi^4)$$

und

$$\int_{n\sigma\pi}^{\infty} z^3\,e^{-z}\,dz = e^{-n\sigma\pi}\,(6 + 6\,n\,\sigma\,\pi + 3\,n^2\sigma^2\pi^2 + n^3\sigma^3\pi^3)$$

Setzt man

$$e^{\sigma\pi} = a = 46{,}163$$

so wird

$$= \frac{30\,\bar{\nu}}{\sigma\,\pi^5}\left(24\,\Sigma\,\frac{a^{-n}}{n^5} + 24\,\sigma\pi\,\Sigma\,\frac{a^{-n}}{n^4} + 12\,\sigma^2\pi^2\,\Sigma\,\frac{a^{-n}}{n^3} + 4\,\sigma^3\pi^3\,\Sigma\,\frac{a^{-n}}{n^2} + \sigma^4\pi^4\,\Sigma\,\frac{a^{-n}}{n}\right)$$
$$- \frac{30\,\bar{\nu}}{\pi^4}\left(6\,\Sigma\,\frac{a^{-n}}{n^4} + 6\,\sigma\pi\,\Sigma\,\frac{a^{-n}}{n^3} + 3\sigma^2\pi^2\,\Sigma\,\frac{a^{-n}}{n^2} + \sigma^3\pi^3\,\Sigma\,\frac{a^{-n}}{n}\right)$$

endlich

$$\vartheta = \frac{30\,\bar{\nu}}{\pi^2}\left(\frac{24}{\sigma\,\pi^3}\,\Sigma\,\frac{a^{-n}}{n^5} + \frac{18}{\pi^2}\,\Sigma\,\frac{a^{-n}}{n^4} + \frac{6\,\sigma}{\pi}\,\Sigma\,\frac{a^{-n}}{n^3} + \sigma^2\,\Sigma\,\frac{a^{-n}}{n^2}\right) \qquad [55]$$

Die Summen konvergieren sehr rasch. Nimmt man in jeder Summe nur das erste Glied, so erhält man als untere Grenze des Intervalles, in dem ϑ liegt,

$$\vartheta > \frac{30\,\bar{\nu}}{\pi^2\,e^{\sigma\pi}}\left(\frac{24}{\sigma\,\pi^3} + \frac{18}{\pi^2} + \frac{6\,\sigma}{\pi} + \sigma^2\right) = 0{,}41316\,\bar{\nu}$$

Berücksichtigt man anderseits, dass alle diese Summen kleiner sind als $\Sigma \frac{a^{-n}}{n} = -lg\,(1-a^{-1})$ und ersetzt man jede Summe durch diesen Wert, so erhält man als obere Grenze

$$\vartheta < \frac{30\,\bar{\nu}}{\pi^2}\left(\frac{24}{\sigma\,\pi^3}+\frac{18}{\pi^2}+\frac{6\,\sigma}{\pi}+\sigma^2\right) lg\,\frac{a}{a-1} = 0{,}41809\,\bar{\nu}$$

Vergleicht man diese beiden Grenzen von ϑ mit dem oben berechneten Wert von $2\,\mu_2{}^2\,\varphi(\bar{\nu})$, so sieht man, dass die normale Fehlerbeziehung hier mit einem Fehler von höchstens 1 % erfüllt ist.

6. — Endlich betrachten wir die abgekürzte Bruhns'sche Reihe, die zur Darstellung empirisch gegebener Verteilungen häufig verwendet wird. Sie lautet:

$$\varphi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2x^2}\left(1-2\,h^4\,\mu_3{}^3\,x+\frac{4}{3}\,h^6\,\mu^3{}_3\,x^3\right) \qquad [16]$$

Dabei bedeutet $\mu_2{}^2$ und $\mu_3{}^3$ das 2. und 3. Moment der gegebenen Verteilung berechnet vom Mittelwert und $h = \frac{1}{\mu_2\sqrt{2}}$. Der Mittelwert $\bar{x}$ selbst wird

$$\bar{x} = -\frac{2\,h^5\,\mu^3{}_3}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2x^2}\,x^2\,dx+\frac{4\,h^7\,\mu_3{}^3}{3\,\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2x^2}\,x^4\,dx$$

also wird nach [611] und [621]

$$\bar{x} = \frac{4\,h^5\,\mu_3{}^3}{\sqrt{\pi}}\left(-\frac{\sqrt{\pi}}{4\,h^5}+\frac{2\,h^2}{3}\,\frac{3\sqrt{\pi}}{8\,h^5}\right) = 0 \qquad [26]$$

Die Streuung kennen wir bereits als $\mu_2{}^2 = \frac{1}{2\,h^2}$ [46]

Daher wird

$$2\,\mu^2{}_2\,\varphi(\bar{x}) = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}$$

Der durchschnittliche Fehler wird nach [311]

$$\vartheta = \frac{2\,h}{\sqrt{\pi}}\left[\int_0^{\infty} e^{-h^2x^2}\,x\,dx-2\,h^4\,\mu_3{}^3\int_0^{\infty} e^{-h^2x^2}\,x^2\,dx+\right.$$

$$\left.+\frac{4\,h^6}{3}\,\mu_3{}^3\int_0^{\infty} e^{-h^2x^2}\,x^4\,dx\right|$$

also nach [611] und [621]

$$\vartheta = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{2h^2} - \frac{2h^4 \mu_3^3 \sqrt{\pi}}{4h^3} + \frac{4h^6 \mu_3^3 3\sqrt{\pi}}{3.8.h^5} \right) = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}$$

Es gilt also hier die Relation [51] in exakter Weise, genau wie beim Gauss'schen Fehlergesetz.

7. — Karl Pearson (*) hat auf einem allgemeineren Wege als dem hier eingeschlagenen gezeigt, dass die normale Fehlerbeziehung für sein Kurvensystem einen Spezialfall der Beziehung

$$\vartheta = 2 \mu_2^2 \varphi(\bar{x}) \frac{4\beta_2 - 3\beta_1}{6(\beta_2 - \beta_1 - 1)}$$

darstellt, wobei

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^6}{\mu_2^6}$$

und

$$\beta_2 = \frac{\mu_4^4}{\mu_2^4},$$

Dies ergab sich durch Integration der diesem System zugrunde liegenden Differentialgleichung vom arithmetischen Mittel bis zur oberen Grenze. Hieraus sieht man, warum die normale Fehlerrelation bei einigen der Pearsonschen Verteilungen zutrifft und bei anderen nicht. Denn dies hängt von den Beziehungen der Momentenquotienten β_1 und β_2 ab. Pearson erweitert dann diese Gleichung durch Integration von einem beliebigen Punkt und gelangt so zu Aussagen über die Lage des Schwerpunktes bei den speziell betrachteten Extremwerten seiner Verteilungen.

Im folgenden werden wir einige allgemeine Eigenschaften der normalen Fehlerbeziehung aufstellen, wobei wir über die zu betrachtende Funktion $\varphi(x)$ nur voraussetzen, dass sie positiv und stetig ist, nur endliche Grössen annimmt und im Unendlichen verschwindet, sodass die für unsere Untersuchung notwendigen Integrale nicht divergieren.

Dann lässt sich der Gültigkeitsbereich der normalen Fehlerbeziehung durch einige einfache Sätze leicht erweitern. Zunächst beweisen wir:

Gilt für eine Verteilung $y = \varphi(x, h_\nu)$ *die Beziehung*

$$\vartheta = \text{konst } \mu_2^2 \varphi(\bar{x}),$$

wobei konst eine numerische, von den Verteilungskonstanten h_ν

(*) *On the mean error of frequency distrib.*, «Biometrika», Vol. XVI, p. 198, 1924.

unabhängige Grösse bedeutet, so gilt diese Beziehung auch für jede durch eine lineare Transformation entstehende Verteilung.

Zum Beweis führt man in die Verteilung $y = \varphi(x)$ eine neue Veränderliche z ein durch die Substitution $x = a z + b$, so muss gelten $\varphi(x)\, dx = \psi(z)\, dz$.

Dem Variationsbereich $-c_1 < x < c_2$ entspricht dann

$$-C_1 < z < C_2$$

wobei

$$C_1 = \frac{c_1 + b}{a}$$

und

$$C_2 = \frac{c_2 - b}{a}$$

Der Mittelwert der neuen Veränderlichen wird $\bar{z} = \frac{\bar{x} - b}{a}$

Seine Wahrscheinlichkeitsdichte beträgt

$$\psi(\bar{z}) = a\, \varphi(a\, \bar{z} + b) = a\, \varphi(\bar{x})$$

Die Streuung $M^2{}_2$ der neuen Verteilung beträgt nach [41]

$$M^2{}_2 = \int_{-C_1}^{C_2} z^2\, \psi(z)\, dz - \bar{z}^2 = \frac{1}{a^2} \int_{-c_1}^{c_2} x^2\, \varphi(x)\, dx - \frac{2b}{a^2}\, \bar{x} +$$

$$+ \frac{b^2}{a^2} - \frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{2b}{a^2}\, \bar{x} - \frac{b^2}{a^2} = \frac{\mu_2{}^2}{a^2}$$

Endlich wird der durchschnittliche Fehler Θ der neuen Verteilung

$$\Theta = 2 \int_{\bar{z}}^{C_2} (z - \bar{z})\, \psi(z)\, dz = \frac{\vartheta}{a}$$

Daher gilt wieder

$$\Theta = \text{konst}\, M_2{}^2\, \varphi(\bar{z}) \qquad [517]$$

weil

$$\frac{\vartheta}{a} = \text{konst}\, \frac{\mu_2{}^2}{a^2}\, a\, \varphi(\bar{x})$$

gelten sollte. Gilt also die normale Fehlerbeziehung für eine bestimmte Verteilung, so gilt sie auch für alle Verteilungen, die aus ihr durch eine lineare Transformation hervorgehen. Insbesondere darf man also die unabhängige Veränderliche stets derart transformieren dass ihr Mittelwert null ist.

Ferner gilt das folgende, einfache Additionstheorem:

Gilt die normale Fehlerbeziehung für eine Reihe von Funktionen $\varphi_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2 \ldots n)$ *so gilt sie auch für ihre jeweils mit konstanten Koeffizienten versehene Summe, falls die Mittelwerte und die hierzu gehörigen Funktionswerte bei sämtlichen Verteilungen einander gleich sind.*

Zum Beweis betrachte man zunächst zwei Verteilungen $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$, für welche die normale Fehlerbeziehung gilt, bezeichne die uns interessierenden Grössen jeweils mit dem Index [1] oder [2], je nachdem sich auf die erste oder zweite Verteilung beziehen, so hat man

$$\vartheta_1 = \text{konst}\ \mu^2_{21}\ \varphi_1(\bar{x}_1)$$

$$\text{und}\ \vartheta_2 = \text{konst}\ \mu^2_{22}\ \varphi_2(\bar{x}_2)$$

Man fordere, dass

$$\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \bar{x}$$

$$\text{und}\ \varphi_1(\bar{x}) = \varphi_2(\bar{x}) = \Phi(\bar{x})$$

Dann gilt auch

$$\frac{\vartheta_1}{\mu^2_{21}} = \frac{\vartheta_2}{\mu^2_{22}} = \text{konst}\ \Phi(\bar{x})$$

Bildet man eine neue Verteilung

$$\Phi(x) = \lambda_1\ \varphi_1(x) + \lambda_2\ \varphi_2(x)$$

wobei auf Grund unserer Normierung

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

sein muss, dann bleibt zunächst der Mittelwert wegen der obigen Forderung erhalten. Für die Streuung M^2_2 gilt

$$M_2{}^2 = \lambda_1\ \mu^2_{21} + \lambda_2\ \mu^2_{22}$$

für den durchschnittlichen Fehler Θ ebenso

$$\Theta = \lambda_1\ \vartheta_1 + \lambda_2\ \vartheta_2$$

Dann gilt für die neue Verteilung wiederum

$$\Theta = \text{konst}\ M^2_2\ \Phi(\bar{x})$$

Denn, wenn man die oben bestimmten Werte für Θ und $M_2{}^2$ einsetzt, wird diese Gleichung zu

$$\lambda_1\ \vartheta_1 + \lambda_2\ \vartheta_2 = \text{konst}\ (\lambda_1\ \mu^2_{21} + \lambda_2\ \mu^2_{22})\ \Phi(\bar{x})$$

Führt man links die mittleren Fehler ein, so wird die Gleichung zu

$$\text{konst}\ \Phi(\bar{x})\ (\lambda_1\ \mu^2_{21} + \lambda_2\ \mu^2_{22}) = \text{konst}\ (\lambda_1\ \mu^2_{21} + \lambda_2\ \mu^2_{22})\ .\ \Phi(\bar{x})$$

und dies ist identisch erfüllt.

Eine fernere Ausdehnung des Gültigkeitsbereichs der normalen Fehlerbeziehung erhält man aus der Darstellung der Funktion $\varphi(x)$

als Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion. Sie führt auf folgenden Satz:

Gilt die normale Fehlerbeziehung für eine Verteilung $\varphi(x)$, *so gilt sie auch für jede Verteilung* $\varphi(x) + U(x)$, *wobei* $U(x)$ *eine beliebige ungerade Funktion, deren Mittelwert null ist.*

Zum Beweise setze man

$$\varphi(x) = G(x) + U(x)$$

wobei

$$G(x) = G(-x)$$
$$U(x) = -U(-x)$$

Dann gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n+1} G(x) = 0$$

und

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} U(x) = 0$$

endlich

$$\int_{-\infty}^{0} x^{2n} G(x)\, dx = \int_{0}^{\infty} x^{2n} G(x)\, dx$$

und

$$\int_{-\infty}^{0} x^{2n+1} U(x)\, dx = \int_{0}^{\infty} x^{2n+1} U(x)\, dx$$

Man transformiere zunächst die unabhängige Veränderliche derart, dass $\bar{x} = 0$, was wegen der Invarianz gegenüber linearen Transformationen zulässig ist. Infolge der obigen Integrale bedeutet dies, dass

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\, U(x)\, dx = 0$$

oder dass auch

$$\int_{0}^{\infty} x\, U(x)\, dx = 0$$

Die Inhaltsbedingung wird aus dem gleichen Grund zu

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(x)\, d\, x = 1$$

Bezeichnet man die sich auf die gerade Funktion beziehenden Werte mit dem Index g, so wird die Streuung

$$\mu^2_2 = 2 \int_0^{\infty} x^2\, G(x)\, d\, x = {}_g\mu_2{}^2$$

Der durchschnittliche Fehler

$$\vartheta = 2 \int_0^{\infty} x\, G(x)\, dx + 2 \int_0^{\infty} x\, U(x)\, d\, x$$

wird, weil der Mittelwert null ist, zu

$$\vartheta = 2 \int_0^{\infty} x\, G(x)\, d\, x = {}_g\vartheta$$

Der Funktionswert am Nullpunkt wird

$$\varphi(0) = G(0)$$

Daher lautet die normale Fehlerbeziehung

$${}_g\vartheta = \text{konst}\; G(0)\; {}_g\mu_2{}^2$$

Um das Zutreffen der normalen Fehlerbeziehung für eine Verteilung zu beweisen, genügt es also, das Zutreffen für ihren geraden Bestandteil zu beweisen. Für jede ungerade Verteilung ist sie erfüllt, wenn ihr Mittelwert null ist. Auf wörtlich demselben Weg beweist man dann den obigen Satz.

Zusammenfassung: Die normale Fehlerbeziehung, wonach der durchschnittliche Fehler gleich einer Konstanten mal der Streuung mal der Wahrscheinlichkeitsdichte des Mittelwerts, ist bei den verschiedenen untersuchten Verteilungen auf drei verschiedene Arten, die verschiedenen Graden der Schärfe entsprechen, erfüllt. Es kann entweder die Konstante exakt gleich 2 sein oder einen anderen numerischen Wert haben welcher von den Verteilungskonstanten unabhängig ist, oder sie kann wieder von den in der Verteilung auftretenden Konstanten abhängen, jedoch hierbei in der Nähe der Zahl 2 bleiben. Zur ersten Kategorie gehört vor allem die abgekürzte Bruhns'sche Reihe. Da diese die meisten in der Praxis auftretenden

nicht allzu unsymmetrischen Verteilungen ziemlich gut wiedergibt, ist ein Zutreffen der Relation für sehr viele Verteilungen ohne weiteres zu erwarten. Zur gleichen Kategorie gehört das Gauss'sche Fehlergesetz als Spezialfall dieser Reihe, dann die De Forest'sche Verteilung (Pearson's Typ III) und ihre beiden Spezialfälle, die Helmertsche Verteilung der Summe zufälliger Beobachtungsfehler, die für die Radioaktivität interessante exponentielle Verteilung, dann das sogen. Gesetz der kleinen Zahlen und die für die Astronomie interessante Galton'sche Verteilung, ferner alle ungeraden Funktionen, deren Mittelwert null ist. Zur zweiten Kategorie gehören die gleichmässige Verteilung, die Maxwell'sche Verteilung und das Planck'sche Strahlungsgesetz. Ferner gehören zu den ersten beiden Kategorien alle aus linearen Transformationen dieser Verteilungen entstehenden Verteilungen und die Summe solcher Verteilungen, wenn sie in der Ordinate und Abszisse des Mittelwerts übereinstimmen. Zur dritten Kategorie gehören die Pearson'schen Fehlergesetze Typ I und II, die symmetrisch-lineare Verteilung, das Bernoulli'sche Gesetz und die logarithmisch transformierte Gauss'sche Verteilung.

Jakob Lestschinsky.

Probleme der Bevölkerungs-Bewegung bei den Juden.

(*Schluss*).

INHALTSVERZEICHNIS.

C) **Die Hauptfaktoren der Sterblichkeit bei den Juden:** Kapitel XIII. - Säuglingssterblichkeit — Kapitel XIV. - Sterblichkeit in verschiedenen Altersgruppen.

D) **Allgemeiner Ueberblick:** Kapitel XV. - Entwicklungstendenzen der Bevölkerungsbewegung bei den Juden.

XIII.

Das gesamte gebrachte Material macht ersichtlich, dass die Judenheit als Ganzes einen bedeutenden Bevölkerungszuwachs aufweist- die verhältnismässig geringere jüdische Geburtlichkeit wird von der auffallend niedrigen jüdischen Sterblichkeit wett gemacht, was in allen Ländern mit jüdischer Bevölkerung mit ganz wenigen Ausnahmen der Fall ist. Wir haben viel Grund zur Annahme, dass die Juden schon vor dem 19ten Jahrhundert eine niedrige Sterblichkeit aufzuweisen hatten; leider sind die bisher gesammelten Unterlagen über die natürliche Bewegung der jüdischen Bevölkerung bis zum 19 ten Jahrhundert äusserst spärlich, deshalb muss man sich endgültiger Schlüsse betreffs der früheren Jahrhunderte vorläufig enthalten. Alle umstrittenen Fragen über die natürliche Bewegung der Juden in der Zeit vor dem 19ten Jahrhundert bleiben aus Mangel an Belegen ungelöst. Jedoch eins ist ohne Zweifel klar: der erstaunliche Zuwachs bei den Juden im 19ten Jahrhundert, dessen Tempo den Zuwachs der nichtjüdischen Bevölkerung um das $1\,^1/_2$ fache überragte, ist hauptsächlich durch die niedrige Sterblichkeit hervorgerufen, durch welche die Judenheit sich schon zu Beginn des 19ten Jahrhunderts auszeichnete und welche sich besonders schnell und intensiv im Laufe des 19ten Jahrhunderts in allen Ländern senkte. Wir finden es deshalb notwendig, die Aufmerksamkeit des Lesers auf

diese Frage zu lenken. Wir beabsichtigen nicht in die Einzelheiten der Ursachen der niedrigen Sterblichkeit bei den Juden in allen Ländern einzudringen, sondern gedenken bloss die grundlegenden Faktoren dieser Erscheinung klarzulegen:

a) der Altersaufbau der Juden unterscheidet sich von dem Altersaufbau der umgebenden Bevölkerung; besonders deutlich tritt dies zum Vorschein in den westeuropäischen Ländern, wo das Judentum eine äusserst geringe Geburtenfrequenz aufweist;

b) die jüdische Bevölkerung unterscheidet sich danach von den umgebenden Völkern durch die höhere soziale Gliederung und vielfach auch durch einen höheren Wohlstandsgrad;

c) die Juden befinden sich in fast allen Ländern auf einer höheren Kulturstufe als die umgebende Bevölkerung; diesem Umstande sind einige bei den Juden stark entwickelte Charakterzüge zuzuschreiben, wie z. B. die ganz besondere Sorgfalt in der Pflege und Behandlung der Kinder, die besondere Vorliebe für Gesundheitskuren, die besonders stark ausgeprägte Todesfurcht, die fast zu einer « nationalen Eigentümlichkeit » der Juden geworden ist, die Bereitschaft beliebige materielle Opfer zu bringen, um die Familienangehörigen, auch die schwächsten und hoffnungslosesten am Leben zu erhalten.

Dass die soziale Lage, der materielle Wohlstand und das Kulturniveau einen entscheidenden Einfluss auf den Sterblichkeitsgrad ausüben, ist ohne weiteres bei dem Vergleiche der Sterblichkeit der Juden untereinander in verschiedenen Ländern zu ersehen. Ist doch die Sterblichkeit bei den Westjuden, unter denen die mittleren und grossbürgerlichen Elemente, sowie die freien Berufe überwiegen, gewöhnlich um ein Fünftel geringer, (in einzelnen Fällen in noch grösserem Masse) als bei den Ostjuden, bei denen die kleinbürgerlichen und werktätigen Elemente vorherrschen.

Alle bisher aufgezählten günstigen Faktoren wirken in erster Reihe auf die niedrige Säuglingssterblichkeit bei den Juden, welche ihrerseits die allgemein jüdische Sterblickeit senkt. Deshalb verweilen wir vorerst bei der jüdischen Säuglingssterblichkeit.

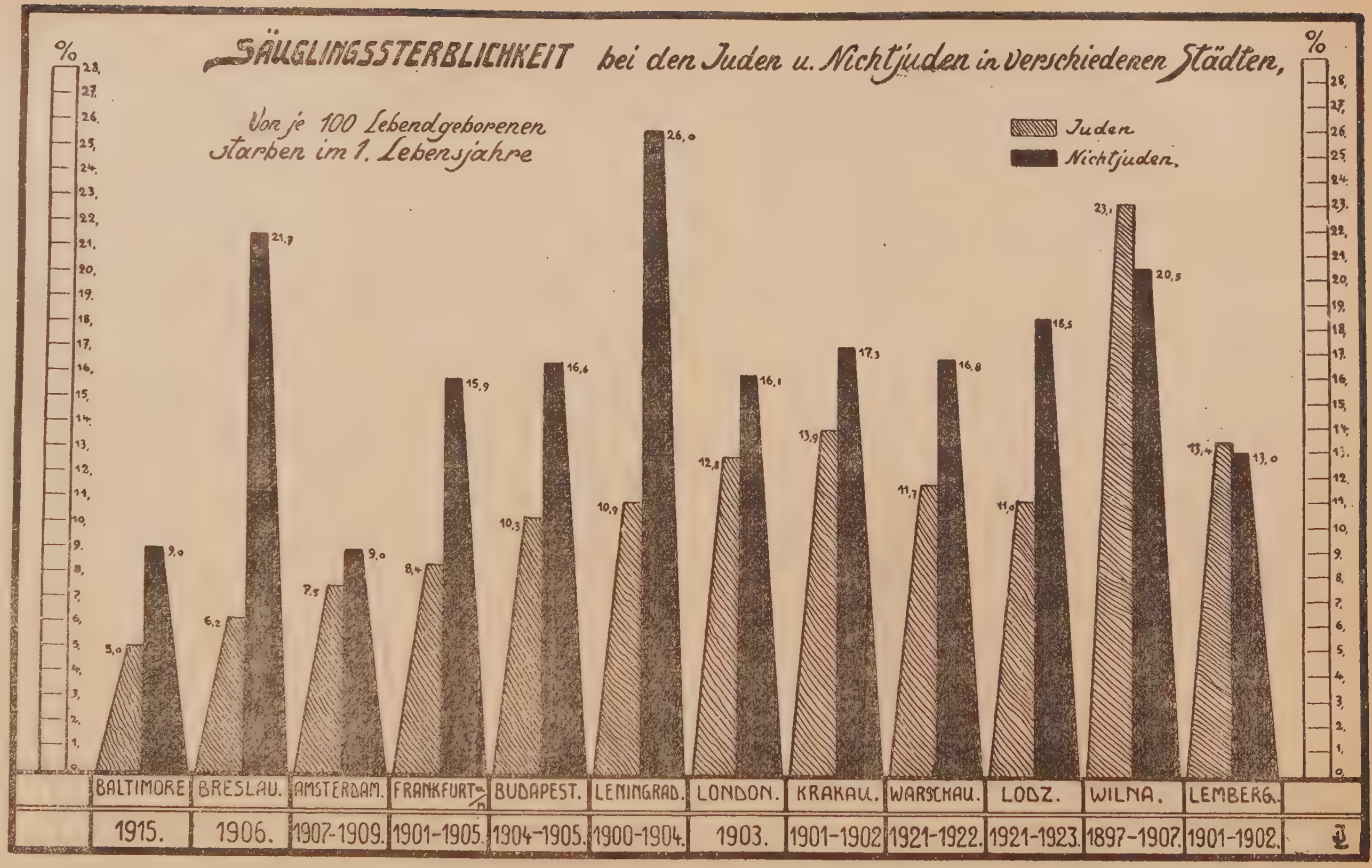
TABELLE XXXIX. — *Säuglingssterblichkeit bei den Juden und Nichtjuden in verschiedenen Ländern und Städten.*

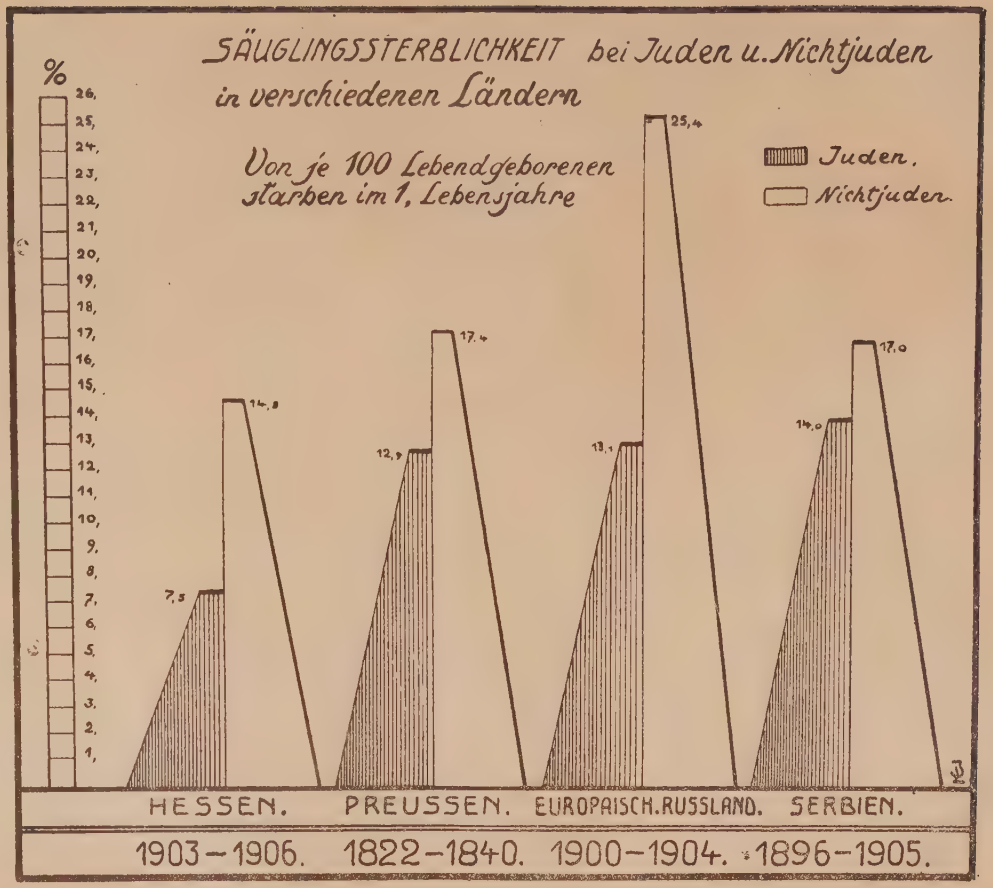
Länder und Städte		Zeitabschnitt	Von je 100 Lebendgeborenen starben im 1 ten. Lebensjahre	
			bei den Juden	bei den Nichtjuden
1) Länder:	Hessen	1903–1906 (1)	7.5	14.8 (2)
	Preussen	1822–1840 (1)	12.9	17.4
	Europäisch. Russland	1900–1904 (1)	11.9	25.4
	Serbien	1896–1905 (1)	14.0	17.0
2) Städte:	Baltimor	1915 (4)	5.1	9.6 (4)
	Breslau	1906	6.2	21.7
	Amsterdam	1907–1909	7.5	9.0
	»	1919–1923	4.1	5.0
	Frankfurt a/Main	1901–1905	8.4	15.9
	» »	1919	5.1	11.6
	Budapest	1904–1905	10.3	16.6
	»	1920	9.1	20.0
	Petrograd	1900–1904	10.9	26.0
	»	1922–1924	7.8	17.8
	London	1903	12 8	16.1 (3)
	Krakau	1901–1902	13.9	17.3
	Warschau	1921–1922	11 7	16.8
	Lodz	1921–1923	11.0	18.5
	Wilna	1897–1907	23.1	20.5
	Lemberg	1894–1896	16.3	20.5
	»	1901–1902	13.4	13.0

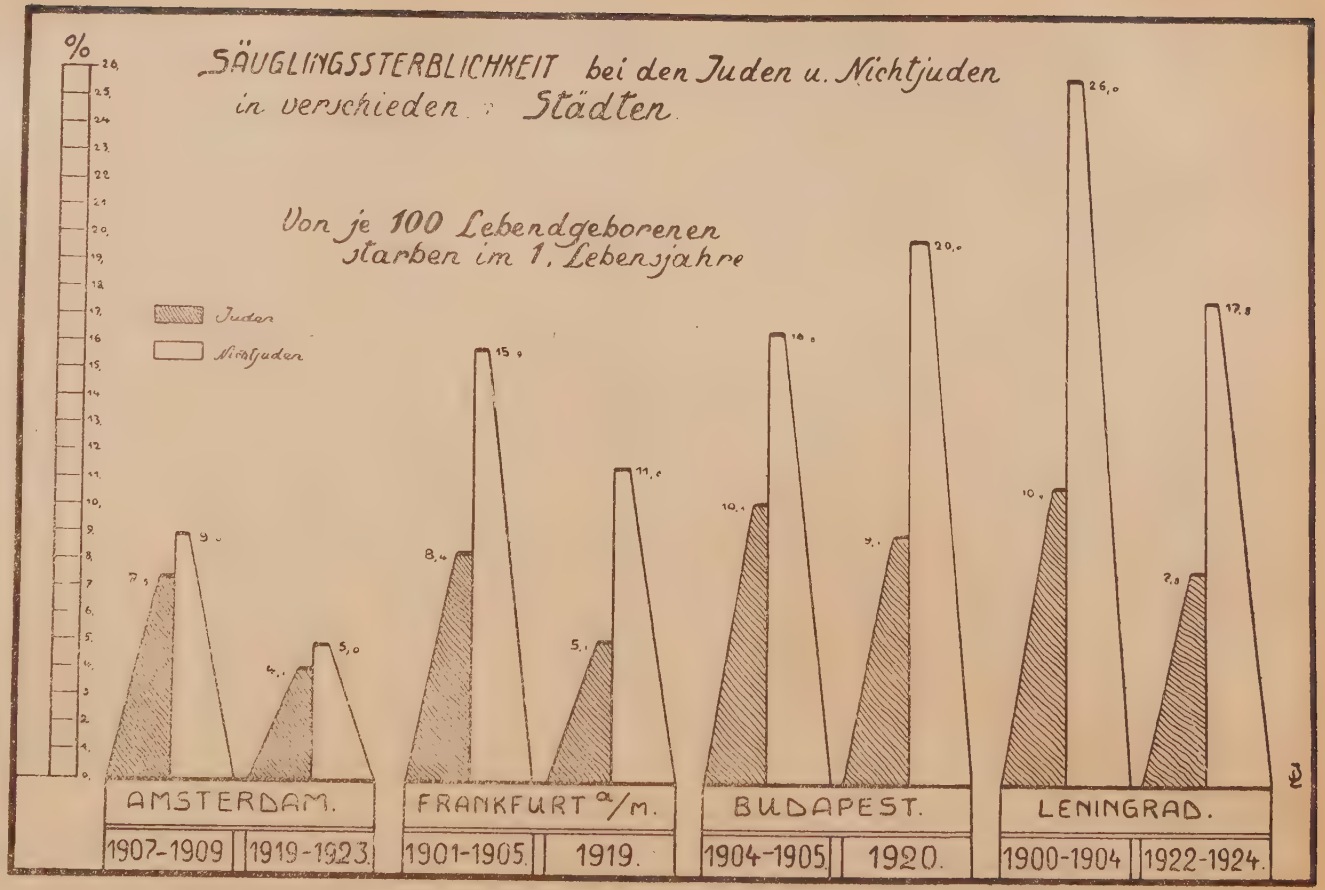
(1) Juden und die Gesamtbevölkerung.
(2) 1905–1906.
(3) 1896–1900.
(4) Eingeborene weisse Bevölkerung.

Hier ist eine Tabelle vor uns, welche vier Staatengebilde und zwölf Städte verschiedener Ländergebiete umfasst. Die Tabelle beginnt mit den westeuropäischen Städten, wie Frankfurt am Main und London, führt uns in die osteuropäischen Zentren, wie Lodz, Warschau und Krakau und schliesst mit der amerikanischen Stadt Baltimore.

Mit Ausnahme Wilnas in den Jahren 1897 bis 1907 zeigen sämtliche Angaben, dass überall die jüdische Säuglingssterblichkeit niedriger ist als die Säuglingssterblickeit bei der umgebenden Bevöl-


SÄUGLINGSSTERBLICHKEIT bei den Juden u. Nichtjuden in verschiedenen Städten,
Von je 100 Lebendgeborenen starben im 1. Lebensjahre
Juden
Nichtjuden
%
BALTIMORE 1915. 3,0 9,0
BRESLAU. 1906. 6,2 21,7
AMSTERDAM. 1907-1909. 7,5 9,0
FRANKFURT a/M. 1901-1905. 8,4 15,9
BUDAPEST. 1904-1905. 10,3 16,6
LENINGRAD. 1900-1904. 10,9 26,0
LONDON. 1903. 12,8 16,1
KRAKAU. 1901-1902 13,9 17,3
WARSCHAU. 1921-1922. 11,7 16,8
LODZ. 1921-1923. 11,0 16,5
WILNA. 1897-1907. 23,1 20,5
LEMBERG. 1901-1902. 13,4 13,0


SÄUGLINGSSTERBLICHKEIT bei Juden u. Nichtjuden
in verschiedenen Ländern
Von je 100 Lebendgeborenen
starben im 1. Lebensjahre
Juden.
Nichtjuden.
%
26,
25,
24,
23,
22,
21,
20,
19,
18,
17,
16,
15,
14,
13,
12,
11,
10,
9,
8,
7,
6,
5,
4,
3,
2,
1,
7,3
14,8
12,9
17,4
13,1
25,4
14,0
17,0
HESSEN.
PREUSSEN.
EUROPAISCH. RUSSLAND.
SERBIEN.
1903–1906.
1822–1840.
1900–1904.
1896–1905.


SÄUGLINGSSTERBLICHKEIT bei den Juden u. Nichtjuden
in verschieden. Städten.
Von je 100 Lebendgeborenen
starben im 1. Lebensjahre
%
Juden
Nichtjuden
7,1
9.
4,1
5,0
8,4
15,9
5,1
11,6
10,1
18,0
9,1
20,0
10.
26,0
2,8
12,8
AMSTERDAM.
1907-1909
1919-1923.
FRANKFURT a/m.
1901-1905.
1919.
BUDAPEST.
1904-1905
1920.
LENINGRAD.
1900-1904
1922-1924.

kerung. In so verschiedenen Ländern, wie Russland und Hessen, ist die Säuglingssterblichkeit im selben Masse, und zwar um 50 % geringer, als die allgemeine Säuglingssterblichkeit; in so verschiedenen Städten, wie London und Krakau, ist die jüdische Säuglingssterblichkeit wiederum im gleichen Masse und zwar ungefähr um 20 % niedriger als die allgemeine Säuglingssterblichkeit.

In Breslau ist die jüdische Säuglingssterblichkeit dreimal so niedrig als bei der Gesamtbevölkerung, in Baltimore zweimal, in Petersburg ist die jüdische Säuglingssterblichkeit um 2 ½ mal (1900-1904) geringer als die nichtjüdische und auch in Frankfurt am Main ist die Sterblichkeit der jüdischen Säuglinge um das Doppelte geringer als bei den Nichtjuden.

Die Angaben betreffs Preussen beziehen sich auf die erste Hälfte des 19tem Jahrhunderts, im weiteren Verlauf werden wir ergänzende Angaben auch für die spätere Zeit bringen.

Für einzelne Städte gibt die Tabelle die Sterblikeit bei Kindern bis zu einem Jahre für zwei Perioden wieder. Die Säuglingssterblichkeit ist sowohl bei den Juden, als auch bei den Nichtjuden gefallen, mit Ausnahme von Budapest, wo die Säuglingssterblichkeit bei den Nichtjuden sich um ein ganzes Viertel erhöht hatte, — das Verhältnis zwischen der jüdischen und nichtjüdischen Säuglingsterblichkeit hat sich deshalb zu Gunsten der Juden verändert. In Frankfurt am Main war die jüdische Säuglingssterblichkeit in den Jahren 1901 bis 1905 fast zweimal geringer und im Jahre 1919 mehr als zweimal geringer als die nichtjüdische. In Budapest war die jüdische Säuglingssterblichkeit in den Jahren 1904 bis 1905 um ein Drittel geringer; im Jahre 1920 mehr als um das Doppelte geringer als die Säuglingssterblichkeit bei den Nichtjuden.

Dass die angeführten Angaben nicht zufälliger Art sind, sondern vielmehr die wirkliche Lage der Dinge wiederspiegeln, kann man aus folgenden Tabellen über die Sterblichkeit der jüdischen Kinder im ersten Lebensjahre ersehen, zumal diese Tabellen sich auf verschiedene Ortschaften beziehen und auf längere Zeitabschnitte erstrecken. Die nächstfolgende Tabelle zeigt die Sterblichkeit der jüdischen Kinder in Frankfurt am Main.

Tabelle XXX. *Von je 100 Geborenen starben im 1. Lebensjahre in Frankfurt am Main.*

Zeitraum	bei den Juden	bei den Nichtjuden
1891–1895	7,7	16,2
1896–1900	7,9	15,8
1900–1905	8,4	15,9
1906–1910	6,0	13,1
1911	4,4	12,4
1912	5,4	10,2
1913	3,6	10,2
1914	4,0	10,5
1915	7,2	10,7
1916	4,7	10,6
1917	10,5	11,7
1918	2,2	10,9
1919	5,1	11,6

Im Laufe von drei Jahrzehnten ist die Säuglingssterblichkeit der jüdischen Bevölkerung im Verhältnis zur Gesamtbevölkerung zurückgeblieben und zwar schwankte dieser Unterschied zwischen zwei bis drei Mal und in manchem Jahre noch mehr. Nur im Jahre 1917 ist die jüdische Kindersterblichkeit derjenigen der Gesamtbevölkerung fast gleichgekommen.

Fast dasselbe beobachten wir in Petrograd.

Tabelle XXXI. — *Von je 100 Geborenen starben im 1. Lebensjahre in Petrograd.*

Zeitraum	bei den Juden	bei den Nichtjuden
1900–1904	10,9	26,0
1905–1909	11,7	26,2
1910–1914	7,8	24,4
1915–1917	8,0	25,2
1918	9,3	23,0
1919	13,3	31,4
1920	10,1	20,4
1922–1924	7,8	17,8

Im Laufe von 20 Jahren ist die jüdische Säuglingssterblichkeit stets um 50-75 % geringer als diejenige der Gesamtbevölkerung. Im Jahre 1919, dem esten Jahre des Kriegskommunismus und des Bürgerkrieges, steigt die Säuglingssterblichkeit erheblich sowohl bei der jüdischen, als auch bei der nichtjüdischen Bevölkerung in Petrograd. Der Krieg dagegen hat die Säuglingssterblichkeit fast gar nicht beeinflusst, weder in Petrograd noch in Frankfurt. Das rührt wahrscheinlich daher, dass in den Kriegsjahren die Geburten erheblich zurückgegangen sind.

Wir haben oben gesehen, wie sehr die Sterblichkeit der Juden in Wilna im Jahre 1917 während der Okkupation angewachsen ist Dasselbe trifft auch für die jüdische Säuglingssterblichkeit zu, wie dies aus der folgenden Tabelle mit aller Deutlichkeit hervorgeht.

TABELLE XXXXII. — *Von je 100 Lebendgeborenen bei den Juden starben im 1. Lebensjahre in Wilna.*

Jahr	%	Jahr	%
1897–1907	23.1	1915	22.9
1911	15.4	1916	15.9
1912	15.2	1917	38.9
1913	12.2	1918	11.7
1914	17.1	1919	14.6
1911–1914	15.0	1920	12,5

Das Jahr 1917 ergibt eine auffallend hohe Säuglingssterblichkeit, obgleich die Sterblichkeit der Kinder bis zu einem Jahre in dieser Stadt ohnedies ziemlich hoch ist.

Vergleicht man die jüdische Säuglingssterblichkeit in den drei eben erwähnten Städten miteinander, so kann man sich leicht davon überzeugen, dass nicht das Rassenmoment, sondern die soziale Struktur und der materielle Wohlstand den Sterblichkeitsgrad bedingen. Die Juden in Frankfurt, Petrograd und Wilna sind sozusagen die typischen Vertreter der drei verschiedenen Arten des zeitgenössischen Judentums. In Frankfurt gehören die Juden in ihrer überwiegenden Mehrzahl dem Mittelstande, dem Grossbürgertum und den freien Berufen an. Unter den Juden in Wilna überwiegen die werktätigen und kleinbürgerlichen Elemente; eine Mittelstellung nehmen die Juden in Petrograd ein, wo neben zahlreichen Angehörigen der mittleren und Grossbourgeoisie, als auch der freien Berufe, die werktätigen

Elemente viel stärker vertreten sind als in Frankfurt. Wenn wir nun den Vergleich über die Säuglingssterblichkeit bei den Juden in diesen drei Städten anstellen, so sehen wir, dass dieselbe in Petrograd $1^1/_2$ mal so hoch ist als in Frankfurt und in Wilna beinahe doppelt so hoch als in Petrograd.

Zugleich zeugen sämtliche bisher angeführten Angaben davon, dass die jüdische Säuglingssterblichkeit überall eine sinkende Tendenz aufweist. Das wird man auch aus den nachfolgenden Tabellen ersehen können.

Die nächstfolgende Tabelle zeigt uns die Entwicklung der Säuglingssterblichkeit bei den Juden im Europäischen Russland im Laufe von vier Jahrzehnten.

Tabelle XXXXIII. — *Von je 100 Geborenen starben im 1. Lebensjahre bei den Juden im Europäischen Russland:*

1867–1869	15.4
1870–1874	14.1
1875–1879	13.3
1880–1884	14.3
1885–1889	13.5
1890–1894	13.7
1895–1899	12.7
1900–1904	11.9

Wir können daraus entnehmen, dass die jüdische Säuglingssterblichkeit im Laufe dieser Zeit ungefähr um 25 % zurückgegangen ist. Man muss dabei in Betracht ziehen, dass die Registrierung der Todesfälle noch zu Beginn des laufenden Jahrhunderts bei den russischen Juden ziemlich unvollständig gewesen ist, vor 40 Jahren aber blieben einfach 20 bis 25 % der Todesfälle bei den Juden unregistriert, so dass in Wirklichkeit der Rückgang der jüdischen Sterblichkeit stärker war, als aus der Tabelle hervorgeht.

Aus derselben Tabelle, selbst wenn man für entsprechende Zeitabschnitte die Zahlen um 10 bezw. 20 % erhöht, ist zu ersehen, dass die Säuglingssterblichkeit bei den russischen Juden, die vor dem Kriege die Hälfte des Gesamtjudentums Europas ausmachten, während der ganzen Zeit auf einer verhältnismässig geringen Höhe gestanden hat und die Säuglingssterblichkeit der meisten westeuropäischen Völker nicht überschritten hat. Es muss überhaupt betont werden, dass bezüglich der Geburtenfrequenz und des Sterblichkeitsgrades das Ostjudentum, das stark von der umgebenden Bevölkerung abweicht, und ihr in der Entwicklung voraus ist, sich auf dem Niveau der meisten westeuropäischen Nationen befindet; was das

Westjudentum anbelangt, so hat es in allen diesen Beziehungen die westeuropäischen Völker überholt. Diese Erscheinung erklärt sich daraus, dass das Ostjudentum, angesichts seines ausgesprochen städtischen Charakters, seiner sozialen Schichtung und kulturellen Entwicklung den Völkern des Westens näher steht als den ausgesprochen agrarischen Völkern, unter denen es lebt.

Die Sterblichkeit der Kinder im 1. Lebensjahre wird hauptsächlich durch folgende Momente bedingt: der Gesundheitszustand des Kindes bei der Geburt, die natürliche oder künstliche Ernährung, die Beschaffenheit der Muttermilch und endlich durch die Widerstandsfähigkeit des Kindes gegenüber denjenigen Krankheiten, die das zarte Kindesalter besonders bedrohen; dass die soziale Lage der Eltern und das Kulturniveau der Mutter dabei von grösster Bedeutung ist, braucht nicht erst gesagt zu werden. Es ist daher interessant eine Aufstellung bezüglich der Sterblichkeit der Kinder in ihren ersten Lebensmonaten zu untersuchen.

TABELLE XXXXIV — *Von je 100 Gestorbenen unter 1 Jahre standen im Alter von:*

Gouvernements / Alter (in Monaten)	Minsk		Kowno		Tschernigoff		Poltawa		Podolien		Wolhyn	
	Gesamt-Bevölk.	Juden	Gesamt-Bevölk.	Juden	Gesamt-Bevölk.	Juden	Gesamt-Bevölk.	Juden	Gesamt-Bevölk.	Juden	Gesamt-Bevölk.	Juden
	im Jahre 1909											
0–1	26,2	13,9	27,6	21,6	29,2	6,3	28,1	25,9	31,0	13,2	32,5	19,8
2–3	23,0	18,7	24,4	27,6	20,7	23,2	21,5	18,9	19,6	19,6	20,4	18,3
4–6	21,4	24,7	21,6	19,2	19,4	25,8	20,6	22,8	17,8	17,3	17,5	21,6
7–12	29,4	42,7	26,4	31,6	30,7	44,7	29,8	32,4	31,6	49,9	29,6	40,3
	im Jahre 1910											
0–1	26,4	12,3	26,7	15,5	26,7	13,1	32,6	27,1	31,2	15,9	32,3	24,7
2–3	22,7	15,6	25,4	22,4	20,4	20,9	20,0	13,1	18,7	20,0	19,5	19,6
4–6	21,4	26,1	23,2	27,5	20,6	24,2	19,2	28,1	17,6	20,2	18,0	19,6
7–12	29,5	46,0	24,7	34,6	32,3	41,8	28,2	31,7	32,5	43,9	32,2	36,1
	im Jahre 1911											
0–1	27,1	13,3	26,4	13,5	29,2	8,1	33,2	16,2	33,4	17,4	34,5	20,8
2–3	22,5	16,7	24,2	19,2	21,5	22,7	19,7	20,6	19,4	19,3	21,1	21,0
4–6	21,2	26,7	23,7	22,6	20,7	29,8	20,0	31,8	17,5	19,9	17,6	19,0
7–12	29,2	43,3	25,7	44,7	28,6	39,4	27,1	31,4	29,7	43,4	26,8	39,2

Die Tabelle zeigt uns, dass in sämtlichen 6 Gouvernements des ehemaligen Russlands die Sterblichkeit der jüdischen Kinder im ersten Monate nach ihrer Geburt viel geringer ist als bei der umgebenden Bevölkerung und zwar im Durchschnitt um 50 % und in den einzelnen Gouvernements noch mehr. Nur im Gouvernement Poltawa ergeben sich fast gleiche Zahlen für beide Bevölkerungsgruppen, wie aus der eben erwähnten Tabelle zu ersehen ist.

Dass die Säuglingssterblichkeit bei den Westjuden schon zu Beginn des 19ten Jahrhunderts viel niedriger war als die der umgebenden Bevölkerung ist aus folgenden Zahlen zu ersehen.

Von je 100 Lebendgeborenen in Preussen in den Jahren 1822-1840 starben im ersten Lebensjahre:

bei den Juden	12,9
bei den Nichtjuden. . .	17,4

Aehnliche Daten über die Säuglingssterblichkeit für den Jahresabschnitt 1819-1873 bringt EUGEN von BERGMANN (*Zur Geschichte der Entwicklung deutscher, polnischer und jüdischer Bevölkerung in der Provinz Posen seit 1824*, Tübingen 1883).

Es ist besonders interessant die Sterblichkeit der unehelichen Kinder bei der jüdischen und der umgebenden Bevölkerung zu vergleichen. Es ergibt sich dann, dass die Sterblichkeit der jüdischen unehelich Geborenen nicht niedriger, sondern im Gegenteil höher ist als die der nichtjüdischen.

Nach EUGEN BERGMANN starben von 100 Geborenen (inklusiv Totgeborenen) im 1. Lebensjahre:

Provinz	bei den Juden		bei den Evangelischen		bei den Katholischen	
	eheliche	uneheliche	eheliche	uneheliche	eheliche	uneheliche
Posen	14.57	33.26	19.55	34.20	19.20	34.96
Bromberg . . .	12.12	33.86	18.57	28.95	17.90	30.90

Die « Preussische Statistik » Heft 75 vom Jahre 1884 bringt folgende Zahlen für Preussen für das Jahr 1882:

Bevölkerungsgruppe	Es überlebten das erste Lebensjahr von 100 000			
	ehelichen		unehelichen	
	Knaben	Mädchen	Knaben	Mädchen
Juden	81.422	84.273	57.792	60.689
Evangelische.	75.322	78.927	60.597	64.235
Katholische	75.778	79.592	58.845	61.713

Die jüdischen unehelichen Kinder, alle materiellen und kulturellen Vorteile der jüdischen ehelichen Kinder entbehrend, sind auf diese Weise den Gefahren der Kinderkrankheiten mehr als die nichtjüdischen unehelichen Kinder ausgesetzt.

Die Angaben über die Sterblichkeit der Kinder bis zum 15ten Lebensjahre bei den Juden und Nichtjuden in Preussen sind schon deshalb von besonderem Interesse, weil sie sich auf einen Zeitabschnitt von ganzen 37 Jahren erstrecken.

Tabelle XXXXV. — *Kindersterblichkeit in Preussen.*

Jahr	Es waren unter 15 Jahren alt von je 100 Gestorbenen		Jahr	Es waren unter 15 Jahren alt von je 100 Gestorbenen	
	Nichtjuden	Juden		Nichtjuden	Juden
1877	54.62	45.07	1905	49.10	18.70
1880	53.94	42.83	1906	53.10	18.58
1885	53.74	37.99	1907	45.14	16.73
1890	52.67	31.88	1908	45.81	16.62
1895	53.05	26.81	1909	45.00	14.25
1900	50.84	23.26	1910	43.99	13.01
1901	51.71	23.15	1911	45.33	14.00
1902	48.15	21.23	1912	39.87	11.02
1903	50.39	20.75	1913	41.08	11.81
1904	48.89	19.78	1914	35.61	9.92

Die Sterblichkeit der Kinder bis zu 15 Jahren war bei den Juden in Preussen in der untersuchten Zeit niedriger als bei den Nicht-

juden; während sie aber zu Beginn der untersuchten Periode bei den Juden bloss um 20 % hinter der Sterblichkeit der Nichtjuden zurückblieb, ist diese Differenz zum Ende der Periode dermassen gewachsen, dass sie bereits 72 % betrug. Es ist bezeichnend, dass im Laufe dieser 37 Jahre die Sterblichkeit der genannten Kindergruppe bei den Juden um 80 %, bei den Nichtjuden nur um 25-33 % zurückgegangen war. Es fällt dabei auf, dass das Sinken der Sterblichkeit bei den Juden, sowie das Tempo dieses Sinkens während der ganzen Zeit, eine gewisse Regelmässigkeit zeigen; bei den Nichtjuden fehlt diese Regelmässigkeit und im Jahre 1906 z. B. ist der Prozentsatz der Kinder bis zu 15 Jahren unter den Gestorbenen fast derselbe wie im Jahre 1880 und erst in den letzten Jahren vor dem Kriege stellt sich ein mehr oder weniger regelmässiges Sinken der Sterblichkeit ein. Natürlich spielt dabei die stark gesunkene Gebürtlichkeit der jüdischen Bevölkerung eine bedeutende Rolle.

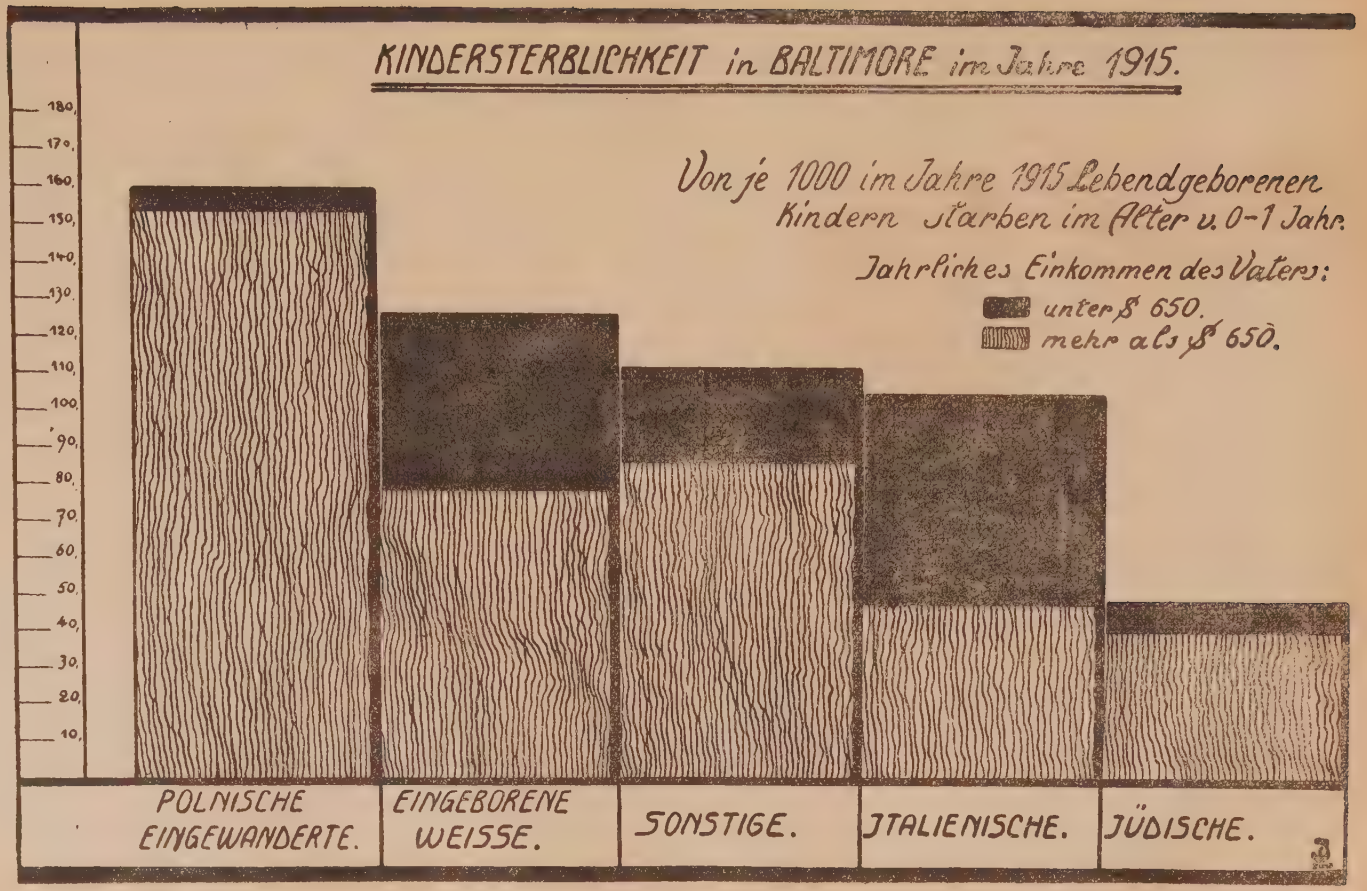
Höchstbedeutend sind die Materialien über die Kindersterblichkeit in den verschiedenen Städten der Vereinigten Staaten Nordamerikas.

Tabelle XXXXVI. — *Kindersterblichkeit in den Städten* Nordamerikas in den Jahren 1911-1916.*

Nationalität der Mütter	Von je 1000 Lebendgeborenen starben im Alter von 0-1 Jahren:
Farbige	154.4
Weisse	108.3
darunter: Eingeborene	93.8
Eingewanderte	127.0
davon: Portugiesen	200.3
Französisch-Kanadier	171.3
Polen	157.2
Deutsche	103.1
Juden	53 5

* Nach den Untersuchungen in 8 Städten: 1) Johnstown, Pa. 1911; 2) Manchester, N. H. 1912-1913; 3) Brockton, Mass. 1912-13; 4) Saginaw, Mich. 1912 13; 5) New-Bedford, Mass. 1913; 6) Waterbury, Conn. 1913 14; 7) Akron, Ohio 1912-14; 8) Baltimore, Md. 1915.

Die Tabelle gibt uns Angaben für 8 Städte, welche in der Bemerkung zur Tabelle aufgezählt sind. In diesen 8 Städten lebten im Jahre 1920 ca 75.000 Juden, jedoch wohnten 60.000 von diesen Juden in Baltimore. Was sehen wir aus dieser Tabelle?


KINDERSTERBLICHKEIT in BALTIMORE im Jahre 1915.
Von je 1000 im Jahre 1915 Lebendgeborenen Kindern starben im Alter v. 0-1 Jahr.
Jahrliches Einkommen des Vaters:
unter $ 650.
mehr als $ 650.
180.
170.
160.
150.
140.
130.
120.
110.
100.
90.
80.
70.
60.
50.
40.
30.
20.
10.
POLNISCHE EINGEWANDERTE.
EINGEBORENE WEISSE.
SONSTIGE.
ITALIENISCHE.
JÜDISCHE.

Die Juden weisen genau die Hälfte der durchschnittlichen Säuglingssterblichkeit der weissen Amerikaner auf. Wenn wir die Säuglingssterblichkeit der Juden mit der Säuglingssterblichkeit einzelner neu eingewanderter Volksstämme vergleichen, so sehen wir, dass die Säuglingssterblichkeit bei den Juden viermal geringer ist als bei den Portugiesen und ungefähr dreimal geringer als bei den kanadischen Franzosen und Polen, zweimal geringer als bei den Deutschen; im Verhältnis zu den altansässigen Amerikanern ist die jüdische Säuglingssterblichkeit fast um das zweifache geringer. Die eingewanderten Juden, welche in der ersten Generation grösstenteils zum Proletariat gehören, haben hinsichtlich des Gesundheitsschutzes der Kinder bis zu einem Jahre nicht nur die Einwanderer hochstehender Kulturnationen, wie die der Deutschen und kanadischen Franzosen überflügelt, sondern sogar die örtliche altansässige amerikanische Bevölkerung, welche in ihrer überwiegenden Mehrheit zu den oberen Gesellschaftsklassen gehört.

TABELLE XXXXVII. — A) *Kindersterblichkeit in Baltimore.*
(1915)

Nationalität der Mütter	Von je 1000 im Jahre 1915 lebendgeborenen Kindern starben im Altervon 0-1 Jahren bei einem jährlichen Einkommen des Vaters	
	unter $ 650	mehr als $ 650
Farbige	161,6	133,3
Eingeborene Weisse	127,4	79,2
Polnische Eingewanderte . .	160,3	153,4
Italienische	105,5	48,6
Jüdische	49,3	40,6
Sonstige	112,2	86,7

B) *Kindersterblichkeit in Baltimore.*

Einkommen des Vaters	Von je 1000 im Jahre 1915 lebendgeborenen Kindern starben im Alter von 0-1 Jahren	
	bei den eingeborenen weissen Müttern	bei den eingewanderten jüdischen Müttern
unter $ 650	127,4	49,4
$ 650 bis $ 849	95,6	
$ 850 bis $ 1849	73,6	40,6
mehr als $ 1850	38,3	
Durchschnitt	*95,9*	*51,0*

Die Tabelle, welche Angaben über die Säuglingssterblichkeit in Baltimore nach einzelnen Nationalitätengruppen im Verhältnis zu ihrer materiellen Lage bringt, ist sehr belehrend. Die jüdischen Einwandererfamilien, welche weniger als 650 Dollar jährlich verdienen, weisen eine 1 $^1/_2$ mal geringere Säuglingssterblichkeit als die altansässigen Amerikaner auf, welche mehr als 650 Dollar jährlich verdienen. Wenn wir die zwei jüdischen Gruppen miteinander vergleichen, ergibt es sich, dass bei den Juden, die weniger als 650 Dollar jährlich verdienen, die Säuglingssterblichkeit um ein Viertel höher ist als bei den besser situierten Juden; bei den Italienern ist das entsprechende Verhältnis noch krasser ausgeprägt: bei den armen Italienern ist die Säuglingssterblichkeit mehr als um das Doppelte höher als bei den reichen; bei den Polen ist der Unterschied sehr gering beide Gruppen von Polen weisen eine erschreckend hohe Säuglingssterblichkeit auf. Im Rahmen jeder Gruppe nehmen die Juden die günstigste Stellung ein; in der Gruppe, die weniger als 650 Dollar jährlich verdient, ergeben die Juden mehr als eine dreifach geringere Säuglingssterblichkeit als die Polen, eine 2 $^1/_2$ mal geringere als die eingeborenen Weissen, zweimal geringere als die Italiener; in der Gruppe, die mehr als 650 Dollar jährlich verdient, haben die Juden fast eine viermal geringere Sterblichkeit der Säuglinge als die Polen, eine zweimal geringere als die eingeborenen Weissen und nur um ein Fünftel geringere als die Italiener.

Die Tabelle B gibt uns noch ein eingehenderes Bild über das Verhältnis der Säuglingssterblichkeit und der materiellen Lage zueinander. Aus dieser Tabelle ist ersichtlich, dass die Säuglingssterblichkeit bei den eingewanderten jüdischen Müttern aller Gruppen fast zusammenfällt mit der Säuglingssterblichkeit der reichsten Gruppe der eingeborenen weissen Mütter, deren Einkommen 1850 Dollar jährlich übersteigt.

Der Verfasser des Artikels in der Sammelschrift der Kinderkommission des Washingtoner Gesundheitsdepartements berichtet, dass die jüdischen und polnischen Einwanderer die ärmste Bevölkerungsschicht der Stadt Baltimore bilden, in welcher Familien mit einem Jahreseinkommen über 650 Dollar sehr selten waren, dennoch haben diese proletarischen jüdischen Einwanderer eine 1 $^1/_2$ fach geringere Säuglingssterblichkeit als die eingeborenen Weissen mit einem Jahreseinkommen von über 650 Dollar. Diese Angaben geben Grund zum Nachdenken über die tatsächlichen Ursachen der Kindersterblichkeit, — es zeigt sich, dass nicht allein der Wohlstand eine entscheidende Wirkung auf die Säuglingssterblichkeit ausübt.

Wir sind weit davon entfernt, die Bedeutung der materiellen Lage für das Bevölkerungsproblem zu negieren — im Gegenteil wir haben ja wiederholt darauf hingewiesen, wie gross die Bedeutung der sozialen Lage der Bevölkerung auf ihre natürliche Bewegung ist, wie bedeutend im besonderen die Verschiedenartigkeit der sozialen Struktur der jüdischen Bevölkerung in den einzelnen Ländern auf die Gebürtlichkeit der Juden einwirkt. Wir hatten jetzt bloss die Absicht zu betonen, dass die angeführten Angaben über den Unterschied der Säuglingssterblichkeit bei den Juden und Nichtjuden beweisen, dass die *kulturellen Lebensgewohnheiten*, die *Familientraditionen* und die Art des Stillens, die zweifellos mit der Familienanhänglichkeit in Zusammenhang zu bringen ist, keine geringe Rolle in der Frage der Säuglingssterblichkeit spielt. Der Verfasser des erwähnten Aufsatzes in der Sammlung meint, dass die Juden deshalb eine so geringe Säuglingssterblichkeit aufweisen, weil die jüdischen Mütter viel öfter als die Nichtjüdinnen ihre Kinder mit eigener Brust stillen und sich nicht so oft zur Arbeit ausserhalb des Hauses begeben und die Kinder ohne Aufsicht lassen.

Dass die proletarisierten jüdischen Auswanderer aus Galizien und Russland sehr oft die Viertel der Weltstädte, wohin sie von Pogromen und Hungersnöten flüchten, in gesundheitlicher Hinsicht heben, ist aus den Angaben über die Säuglingssterblichkeit in verschiedenen Vierteln Londons zu ersehen.

Tabelle XXXXVII[a]. — *Es starben im Alter 0-1 Jahre von je 1000 Geborenen in Stepney, Southwark und London:*

Stadtteil	1886 90	1891-95	1896 900
Stadtbezirk Whitchapel	170	158	144
» St. George-in-the-East	195	190	181
» Limehouse	191	187	204
» Mile End Old Town	147	154	155
ganzes Stadtviertel Stepney	170	168	165
Stadtviertel Southwark	172	181	186
Ganz London	153	156	161

Der Verfasser, der die eben gebrachte Tabelle aufgestellt hat, fügt hinzu:

« Nach dieser Tabelle gingen die Sterbefälle unter einem Jahr auf 1000 Geburten in den Bezirken von Whitchapel und St. George

in the East, wo eine stete Zuwanderung von Juden konstatiert wurde, beständig zurück, stiegen jedoch gleichzeitig in Limehouse und Mile End, wo die Zahl der Juden geringer ist, und nahmen in dem Bezirk Southwark und in London allgemein bedeutend zu.

« Die von Dr. NIVEN, dem Bezirksarzt von Manchester angegebenen Ziffern zeigen noch auffallender die ausserordentlich niedrige Kindersterblichkeit in den zum grossen Teil von Juden bewohnten Distrikten. Von allen statistischen Bezirken, in welche die Stadt Manchester vom statistischen Amt eingeteilt wird, war während der Jahre 1898 bis 1901 die Zahl der Todesfälle im Bezirk Cheetham, in dem die meisten Juden wohnen, in jedem Jahre die niedrigste, 1898 betrug die Zahl 196 für die ganze Stadt und 122 für Cheetham, 1899 betrug sie 205 für die Stadt und 104 für Cheetham. So bewegte sich in dem jüdischen Hauptdistrikt von Manchester die Kindersterblichkeit nur zwischen 50-60 % der Zahl für die ganze Stadt ».

Derselbe Verfasser führt die Äusserung eines Londoner Bezirksarztes über die Ursachen der niedrigen jüdischen Säuglingssterblichkeit an, er sagt:

«. Doktor L. D. THOMAS, der Arzt des Bezirkes, führte die geringe Kindersterblichkeit unter den Juden auf die Tatsache zurück, dass die Fälle, wo die Müttern ihre Kinder selbst stillen, bei den jüdischen Müttern häufiger sind, wodurch die durch Diarrhoe verursachte Kindersterblichkeit um die Hälfte vermindert wird ».

Derselbe Verfasser führt die Äusserung eines zweiten Arztes an:

« Sèr SHIRLEY MURPHY schrieb den Ausländern (d. h. den Juden) in Stepney die Eigenschaften der Enthaltsamkeit, der Verwendung grösserer Sorgfalt auf die Kinder, auf sich selbst und auf ihre Lebensweise zu » (1).

Wir sehen, dass diese Äusserungen der Londoner Ärzte mit der Meinung amerikanischer Autoren, die wir angeführt haben, zusammenfallen.

XIV.

Die Säuglingssterblichkeit ist zweifellos einer der Hauptfaktoren, der auf die allgemeine Sterblichkeit einwirkt, jedoch hat auch die Kindersterblichkeit keine geringe Bedeutung, d. h. die Sterblichkeit der Kinder im Alter bis zu fünf oder zehn Jahren.

---

(1) « Zeitschrift für Demographie u. Statistik der Juden », 1906, Heft 8-9.

Es sind Angaben für eine grosse Zahl von Ortschaften vorhanden, welche bezeugen, dass auch die Kindersterblichkeit bei den Juden eine viel geringerere ist als bei der umgebenden Bevölkerung, obgleich es auch Angaben entgegengesetzter Natur gibt. Mit diesen letzteren werden wir uns zuerst beschäftigen. Wir fangen mit London an, von welchem eben die Rede war.

TABELLE XXXXVIII. — *Auf 1000 Lebende der betreffenden Altersgruppe kommen Gestorbene in London im Jahre 1903* (*).

Alter	Gesamtbevölkerung		Juden	
	männlich	weiblich	männlich	weiblich
0–5	54,12	46,44	65,10	52,15
5–15	2,49	2,54	3,56	2,28
15–25	3,13	2,54	3,17	1,91
25–35	5,81	4,32	4,59	4,26
35–45	11,25	8,66	5,02	6,12
45–55	19,83	14,24	13,22	11,33
55–65	34,73	24,28	29,49	23,99
65–75	67,02	52,18	47,01	43,14
mehr als 75	140,50	125,90	200,0	163,59

(*) Nach der « Zeitschrift für Demographie u. Statistik der Juden », 1906, Heft 8 9.

Die Tabelle gibt uns die Sterblichkeit verschiedener Altersgruppen im Verhältnis zu den Lebenden jeder Gruppe wieder. Trotzdem die Juden eine geringere Säuglingssterblichkeit haben als die Gesamtbevölkerung in London ist die Kindersterblichkeit (0-5 Jahre) bei den Juden höher beim männlichen Geschlecht um 25 %, beim weiblichen etwas weniger um 12 %. Leider finden wir im Aufsatze (Zeitschrift für Demographie u. Statistik der Juden 1906, Heft 8-9), dem wir die Tabelle entnehmen, keine Erklärung für diese Erscheinung.

In den zwei folgenden Altersgruppen sind die Koeffizienten der Sterblichkeit bei beiden Bevölkerungsgruppen fast gleich ; in den darauf folgenden Gruppen aber bleibt die jüdische Sterblichkeit während des ganzen Zeitabschnitts niedriger als bei den Nichtjuden mit Ausnahme der letzten Gruppe (mehr als 75 Jahre).

Die Sterblichkeit der Männer im Alter von 35-45 Jahren ist bei den Juden zweimal geringer als bei der Gesamtbevölkeruug, in der nächsten Gruppe (45-55 Jahre) um ein ganzes Drittel. Die Sterblich-

keit der Frauen in den erwähnten Gruppen ist bei den Juden geringer etwa um ein Viertel.

Bloss eingehende Untersuchungen der Sterblichkeit einzelner professioneller Gruppen im Rahmen einzelner Altersklassen, wie auch hinsichtlich anderer professioneller Lebensbedingungen könnten uns Aufschluss über die tatsächlichen Gründe der niedrigen Sterblichkeit der mittleren Altersgruppen bei den Juden geben. Es ist ja klar, dass der professionelle Bestand und die Klassenlage der Juden und Nichtjuden in London grundverschieden sind.

Angaben aus Krakau verneinen offensichtlich auch die Behauptung, dass die Säuglings und Kindersterblichkeit (1-10 Jahre) bei den Juden geringer ist als bei den Nichtjuden.

Tabelle XXXXIX. — *Die Gestorbenen in Krakau dem Alter nach.*

Alter	1887 bis 1889		1891 bis 1893		1894 bis 1896		1897 bis 1900	
	Nicht-juden	Juden	Nicht-juden	Juden	Nicht-juden	Juden	Nicht-juden	Juden
0-1	19,6	28,4	17,6	21,8	20,3	23,7	16,5	21,5
1-5	11,2	19,6	14,2	24,3	12,4	20,9	10,8	14,1
5-15	3,7	5,2	4,7	6,1	4,8	5,4	4,6	5,2
15-40	29,0	13,1	27,5	13,8	28,4	13,9	27,4	15,8
40-50	10,4	7,5	9,4	4,9	9,4	5,7	10,6	6,0
50-60	9,4	6,3	9,3	7,3	6,8	8,5	10,4	9,5
60-70	8,2	8,5	8,0	9,2	8,2	8,5	9,9	10,5
70-80	5,7	7,9	6,3	9,6	6,7	8,5	6,6	11,1
80 —	2,8	3,5	3,0	3,0	3,2	4,9	3,9	6,3
Insgesamt	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0

Diese Tabelle zeigt die Sterblikeit der Einwohner Krakaus nach Altersgruppen. Hier bietet sich ein ganz anderes Bild als in den vorhin angeführten Tabellen. Der Anteil der Säuglinge bei den Juden bleibt hier höher als bei den Nichtjuden; noch bedeutender ist der Unterschied zwischen der jüdischen und nichtjüdischen Sterblichkeit in der Altersgruppe 1-5 Jahre; hier ist die jüdische Sterblichkeit die ganze Zeit 1 $^1/_2$ mal höher als bei den Nichtjuden; in der Gruppe 5-15 Jahren bleibt die jüdische Sterblichkeit immer noch höher als die nichtjüdische; dagegen ist sie in der folgenden Altersgruppe (15-40 Jahre) schon zweimal niedriger als die nichtjüdische Sterblichkeit und auch in der Altersgruppe 40-50 Jahre ist die Sterblichkeit der Juden ebenfalls niedriger als bei den Nichtjuden; in

den höheren Altersgruppen 50-60 und 60-70 kann man ein gewisses Gleichgewicht beobachten, das in der Gruppe der Greise 70-80 zu Gunsten der nichtjüdischen Bevölkerung gestört wird.

Die Intensität der Sterblichkeit der einzelnen Altersgruppen wird zweifellos am besten durch das Verhältnis der in jeder Altersgruppe in einer Zeiteinheit Gestorbenen zu der Zahl der lebenden Personen dieser Altersgruppe während derselben Zeiteinheit gekennzeichnet. Wir waren daher bei der Feststellung der Säuglingssterblichkeit stets bemüht, die Angaben, die das Verhältnis der Verstorbenen zu den neugeborenen Säuglingen anzeigen, nach Möglichkeit zu verwerten. Wenn man aber die Verstorbenen auf Altersgruppen verteilt, so muss man schon beim Vergleich der Sterblichkeit der verschiedenen Bevölkerungsgruppen notwendigerweise auch ihren Altersaufbau mitvergleichen. Ohne eine derartige Gegenüberstellung des Altersaufbaues bei der gegebenen Bevölkerung der Sterblichkeit ihrer einzelnen Altersgruppen verbleiben alle Schlussfolgerungen zweifelhaft und bedürfen einer strengen Prüfung. THEILHABER, der versucht hat, den Beweis zu führen, dass die Säuglingssterblichkeit bei den Juden höher ist als bei der nichtjüdischen Bevölkerung, hat fast ausschliesslich Angaben benutzt, welche die eben gekennzeichneten Mängel aufweisen.

Bringen wir einige Angaben über den Altersaufbau der Juden und Nichtjuden in Krakau, die ein grelles Licht auf die eben gestreifte Frage werfen:

TABELLE L. — *Der Altersaufbau der Juden und Nichtjuden in Krakau (1891)*

Altersgruppen	Juden	Nichtjuden
1-11	24,76	15,42
11-21	23,85	18,55
21-41	29,60	43,45
41-61	16,15	16,62
61-81	5,41	5,57
81 und mehr	0,23	0,39
Zusammen	100,00	100,00

Leider fallen die Altersgruppen in dieser Tabelle nicht mit der Altersgliederung in der Tabelle 49 zusammen. Es ist jedoch leicht die Abhängigkeit der Alterszusammensetzung der Gestorbenen von dem Stärkeverhältnis der einzelnen Altersgruppen in der Bevölkerung

festzustellen. So sehen wir z. B., dass die Juden bis zu 15 Jahren eine 1 $^1/_2$ mal stärkere Sterblichkeit ergeben als die Nichtjuden und auch in der Bevölkerung sind diese Altersgruppen bei den Juden fast im selben Grade höher als bei den Nichtjuden. Die Gruppe von 15 bis 40 Jahren ergibt bei den Juden eine zweimal niedrigere Sterblichkeit, als bei den Nichtjuden; in der jüdischen Bevölkerung ist der Anteil der Altersgruppe von 21 bis 41 Jahren verhältnismässig 1 $^1/_2$ mal geringer als der Anteil derselben Altersgruppe bei den Nichtjuden. In den älteren Altersgruppen verliert sich schon diese Abhängigkeit: in der Altersgruppe 40 bis 60 Jahre ergeben die Juden eine um ein Drittel geringere Sterblichkeit als die Nichtjuden, in der Bevölkerung sind die Juden dieser Altersgruppe in demselben Verhältnis vertreten wie die Nichtjuden dieser Altersgruppe. Auch in den höchsten Altersgruppen sind die Juden in der Bevölkerung in dem gleichen Verhältnis vertreten wie die Nichtjuden, doch ist der Anteil dieser Altersgruppe unter den gestorbenen bei den Juden höher als bei den Nichtjuden.

Die nächstfolgende Tabelle veranschaulicht uns die jüdische Sterblichkeit in Hessen.

Tabelle LI — *Die gestorbenen Juden und Nichtjuden in Hessen dem Alter nach*:

Altersklassen	bei den Juden 1901-1912		bei den Nichtjuden 1906-1910	
	männlich	weiblich	männlich	weiblich
0-1	10,0	8,7	27,0	22,2
1-14	4,1	4,9	11,7	12,3
15-29	5,4	4,9	6,9	7,5
30-59	23,9	23,8	21,5	20,5
60-69	22,8	21,3	14,1	15,4
70 und mehr	33,8	36,4	18,8	22,1
insgesamt	100,0	100,0	100,0	100,0

Bei den Juden in Hessen ist die Säuglingssterblichkeit 2 $^1/_2$ bis 3 mal niedriger als bei der umgebenden Bevölkerung; die Sterblichkeitszahl der Altersgruppen 1 bis 14 und 15-29 ist bei den Juden in Hessen jedenfalls geringer als bei den Nichtjuden; aber angefangen von der Altersgruppe 30 bis 59 Jahre übersteigt die jüdisch Sterblichkeit diejenige der umgebenden Bevölkerung und je höher die betreffende Altersgruppe, desto erheblicher weicht die jüdische Sterblichkeit von der nichtjüdischen ab.

Aus der Tabelle, welche die Alterszusammensetzung der Bevölkerung Hessens bringt, gewinnen wir die Überzeugung, dass die jüngeren Altersgruppen nur bis 10 Jahre bei den Juden um das 1 $^{1}/_{2}$ fache geringer vertreten sind als bei der umgebenden Bevölkerung.

Sehr interessant sind die Angaben über die Sterblichkeit der einzelnen Altersgruppen bei den Juden in Budapest. Die jüdische Bevölkerung, die eine fast gleiche Alterszusammensetzung aufweist wie die Katholiken, welche die Majorität der Bevölkerung ausmachen, zeichnet sich jedoch durch eine viel niedrigere Sterblichkeit aus.

Tabelle LII — *Auf 1000 Einwohner des betreffenden Alters starben in Budapest 1901-1905:*

Altersgruppen	Juden		Katholiken	
	männlich	weiblich	männlich	weiblich
0-5	38,5	36,4	86,9	76,7
5-10	3,9	4,6	7,8	6,3
10-15	3,0	2,0	2,6	2,9
15-20	3,0	2,6	4,2	4,5
20-30	5,2	4,4	8,4	8,3
30-40	7,1	5,6	14,1	10,6
40-50	12,9	10,2	23,7	14,1
50-60	24,7	20,3	36,8	19,6
60-70	41,9	34,9	62,9	41,4
70-80	104,7	67,3	114,9	91,6
80 u.m.	196,9	182,8	212,1	155,9

In der Gruppe bis zu fünf Jahren ist die jüdische Sterblichkeit mehr als zweimal geringer als die nichtjüdische; dasselbe wiederholt sich fast in der Altersgruppe 5 bis 10 Jahre. Der Schluss ist klar: die Kindersterblichkeit bei den Juden in Budapest ist bedeutend niedriger als bei den Katholiken. Aber auch in den nächstfolgenden Altersgruppen ist die Lage der Juden viel günstiger als die der Katholiken — z. B. sterben bei den Juden in der Altersgruppe von 30 bis 40 Jahre in beiden Geschlechtern um zweimal weniger Personen als bei den Katholiken; in der Altersgruppe 40 bis 50 Jahre sterben zweimal weniger jüdische Männer als katholische. In der ganzen Tabelle sehen wir bloss zwei Ausnahmefälle — in den weiblichen Altersgruppen 50 bis 60 Jahre und mehr als 80 Jahre, wo die jüdische Sterblichkeit höher ist als die katholische.

Die Angaben bezüglich Amsterdam, wo die jüdische Bevölkerung, wie erwähnt, ihrer sozialen Lage nach einen ostjüdischen Typus darstellt, zeigen uns dass in allen Altersgruppen, mit einigen unbedeutenden Ausnahmen, die jüdische Sterblichkeit niedriger ist als die nichtjüdische.

Tabelle LII a. — *Von je 1000 Personen des betreffenden Alters starben in den Jahren 1901 bis 1913 in Amsterdam:*

Altersgruppen	Juden		Nichtjuden	
	männlich	weiblich	männlich	weiblich
0–1	101,4	80,9	123,7	98,1
1–4	11,9	10,4	19,2	17,2
5–13	2,0	1,4	2,5	2,4
14–19	2,1	2,0	3,0	3,0
20–29	3,4	2,0	4,5	3,8
30–39	4,3	3,6	5,3	5,1
40–49	7,5	6,5	9,9	7,7
50–79	34,1	28,7	35,7	30,4
80 u. m.	197,7	159,1	210,6	238,9

Die Säuglingssterblichkeit bei den Juden ist etwa um $^1/_6$ geringer als bei den Nichtjuden; in der Altersgruppe 1 bis 4 Jahre ist die jüdische Sterblichkeit 1 $^1/_2$ mal geringer als die nichtjüdische; in den nächstfolgenden Altersgruppen ist die jüdische Sterblichkeit auch geringer als die nichtjüdische, jedoch in nicht bedeutendem Umfange und bloss in der Altersgruppe über 80 Jahre ist die Sterblichkeit bei den jüdischen Frauen um ein ganzes Drittel geringer als bei den nichtjüdischen.

Bringen wir noch eine höchst interessante Tabelle über die Sterblichkeit einzelner Altersgruppen russischer Juden, welche wiederum die Behauptung bestätigt, dass die jüdische Kindersterblichkeit sich von der Kindersterblichkeit der umgebenden Bevölkerung durch ihre verhältnismässig geringe Höhe unterscheidet, und je höher die Altersgruppen rücken, desto geringer ist der Unterschied in der Sterblichkeit bei den Juden und Nichtjuden und in den höchsten Altersgruppen der Greise überragt schon die jüdische Sterblichkeit die nichtjüdische.

TABELLE LIII. — *Auf je 1000 der betreffenden Altersgruppe starben in Russland in den Jahren 1896 bis 1897:*

Konfession / Alter	Griechisch-Katholisch	Mohamedaner	Lutheraner	Römisch Katholisch	Mosaisch
0-9	86,4	66,6	44,8	44,5	30,7
10-19	5,7	6,0	5,0	5,4	3,7
20-39	8,8	9,7	6,8	7,8	6,1
40-59	18,3	14,5	13,3	17,7	13,0
60-79	59,2	40,4	49,7	53,9	47,5
79 und mehr	108,2	92,7	137,6	95,6	172,7
durchschnittlich	*34,8*	*27,7*	*21,0*	*22,3*	*16,0*

Die Tabelle zeigt uns die Sterblichkeit bei den einzelnen Konfessionen in Russland in den Jahren 1896 bis 1897. Wir können daraus ersehen, dass die Sterblichkeit der Kinder bis neun Jahre bei den Juden geringer ist als bei den Angehörigen aller anderen Konfessionen; und zwar ist sie beinahe dreimal niedriger als bei den Angehörigen der griechisch-katholischen Konfession, zweimal niedriger als bei den Mohamedanern und 1 $^1/_2$ mal niedriger als bei den Römisch katholischen und Lutheranern. Dasselbe beobachten wir bei allen anderen Altersgruppen mit Ausnahme der höchsten von 79 Jahren und höher, in der das russische Judentum begreiflicherweise eine viel höhere Sterblichkeit aufweist als alle anderen Gruppen.

Wir behaupten, dass aus dem in diesem und vorhergehenden Kapitel gebrachten Material Eines unumstritten hervorgeht — die jüdische Säuglings- und Kindersterblichkeit ist überall geringer als die Säuglings und Kindersterblichkeit bei den Nichtjuden. Die Angaben bezüglich Krakau über die höhere Säuglings-und Kindersterblichkeit und die Angaben von London über die höhere Kindersterblichkeit bei den Juden im Verhältnis zu den Nichtjuden bedürfen der weiteren Prüfung und Ergänzung.

Was die mittleren Altersgruppen betrifft, so ist Grund zur Annahme vorhanden, dass auch in diesen Gruppen die Sterblichkeit der Juden geringer ist als bei den Nichtjuden, jedoch bedarf eine diesbezügliche endgültige Feststellung eingehender Belege über die Sterblichkeit einzelner professioneller Gruppen und Klassenschichten, da nur durch eine solche Untersuchung die Gründe für eine besonders niedrige Sterblichkeit der Juden aufgedeckt werden können.

XV.

Wir haben uns Mühe gegeben die natürliche Bewegung der jüdischen Bevölkerung in fast allen Ländern, für die ein zuverlässiges statistisches Material vorliegt, darzustellen. Versuchen wir jetzt unsere Ergebnisse zusammenzufassen und wollen wir zu diesem Zwecke einige Tabellen aufstellen, welche die natürliche Bewegung der jüdischen und nichtjüdischen Bevölkerung in verschiedenen Ländern und Städten zu verschiedenen Zeitpunkten darstellen.

In der zu allererst folgenden Tabelle ist die natürliche Bewegung der jüdischen Bevölkerung in 13 Staaten und 18 Städten zu einem bestimmten Zeitpunkt erfasst, zu Beginn des 20ten Jahrhunderts. Die 13 Staaten, welche in der Tabelle Aufnahme gefunden haben, hatten zum untersuchten Zeitabschnitt zusammen 8 Millionen jüdischer Einwohner, was etwa 3/4 des damaligen Judentums in der Welt ausmachte.

TABELLE LIV. — *Geburten, Todesfälle und Geburtenüberschuss zu Beginn des XX. Jahrhunderts bei den Juden und bei den Nichtjuden.*

Länder und Städte	Jahr	Gebürtlichkeit (Lebendgeborene)		Sterblichkeit (ohne Totgeborene)		Geburtenüberschuss	
		Juden	Nicht-juden	Juden	Nicht-juden	Juden	Nicht-juden
I. *Länder:*							
1. Württemberg .	1900	15,6	34,3	14,4	23,4	1,2	10,9
2. Böhmen . . .	1901	17,7	34,1	14,7	23,3	3,0	10,8
3. Bayern . . .	1900	18,1	38,0	13,5	25,4	4,6	12,6
4. Mähren . . .	1901	19,3	35,8	15,0	24,5	4,3	11,3
5. Preussen. . .	1900	19,5	36,3	15,0	21,7	4,5	14,6
6. Hessen . . .	1900	20,1	34,5	15,7	20,7	4,4	13,8
7. Bukowina . .	1900	29,5	42,8	16,4	27,0	13,1	15,8
8. Serbien . . .	1900	32,5	42,0	15,0	23,3	17,5	18,7
9. Rumänien . .	1901	33,4	41,1	20,4	27,4	13,0	13.7
10. Ungarn . . .	1900	33,8	39,3	17,0	27,2	16,8	12,1
11. Europäisch. Russland. . .	1900-04	34,4	48,6	16,7	30,9	17,7	17,7
12. Bulgarien . .	1902	38,2	39,7	16,9	24,4	21,3	15,3
13. Galizien. . .	1900	38,2	44,0	19,2	26,9	19,0	17,1
II. *Städte:*							
1. Brünn . . .	1903-04	15,7	31,9	12,4	27,6	3,3	4,3
2. Prag	1901	15,9	31,3	13,3	20,0	2,6	11,3
3. Frakfurt am Main	1900	18,0	30,3	11,8	17,2	6,2	13,1
4. Berlin . . .	1900	19,0	27,0	13,2	16,2	5,8	11,8
5. Hamburg . .	1900	19,1	28,8	11,6	17,2	7,5	11,6
6. Triest . . .	1903-04	19,3	35,9	14,8	23,7	4,5	12,2
7. Wien. . . .	1900	22,2	31,7	12,9	24,4	9,3	7,3
8. Graz	1903-04	23,5	32,1	11,1	23,7	12,4	8,4
9. Amsterdam. .	1900	24,8	31,5	12,3	17,4	12,5	14,1
10. Budapest . .	1900	27,8	33,4	14,0	23,2	13,8	11,8
11. Bukarest . .	1901-05	29,5	29,0	14,4	23,0	15,1	6,0
12. Warschau . .	1901	30,9	40,1	18,6	23,3	12,3	16,8
13. Leningrad . .	1900-04	29,8	30,6	14,0	24,6	15,8	6,0
14. Krakau . . .	1899	35,3	35,8	19,1	34,6	16,2	1,2
15. Odessa . . .	1900	37,3	—	23,7	—	13,6	—
16. Lemberg . .	1901-02	38,2	41,6 (*)	20,2	29,1 (*)	18,0	12,5 (*)
17. London . . .	1903	45,0	29,0	14,6	17,1	30,4	11,9
18. Boston . . .	1900	94,6	16,4 (**)	15,9	17,2 (**)	78,7	0,8 (**)

(*) Gesamtbevölkerung.
(**) Eingeborene Weisse.

Beginnen wir mit der Analyse dieser höchst aufschlussreichen Tabelle. In allen Staaten und Städten, mit Ausnahme von London und Boston — der jüdischen Einwanderungsstädte, — ist die Gebürtlichkeit bei den Juden geringer als bei den Nichtjuden. Wenn wir die einzelnen Staaten und Städte nach ihrer Zugehörigkeit zu West- oder Osteuropa einteilen, so wird es ersichtlich, dass die Entfernung, welche das Westjudentum von den westeuropäischen Wirtsvölkern in der Geburtenfrequenz trennt, eine viel weitere ist als die diesbezügliche Entfernung zwischen dem Ostjudentum und den osteuropäischen Wirtsvölkern. Während in den westlichen Ländern die jüdische Gebürtlichkeit zu jener Zeit um die Hälfte bezw. um ein Drittel geringer war als die nichtjüdische, war die jüdische Gebürtlichkeit in den östlichen Ländern bloss um ein Viertel und in vielen Fällen nicht mehr als um einige Prozent niedriger als bei den östlichen Wirtsvölkern.

Hinsichtlich der Sterblichkeit wiederholt sich das Bild im grossen Ganzen, mit einigen wesentlichen Berichtigungen. Wiederum ist in allen Ländern und Städten, dieses mal ohne jegliche Ausnahme, die jüdische Sterblichkeit niedriger als die nichtjüdische. Jedoch ist erstens die Sterblichkeit bei den Westjuden im Verhältnis zu den westeuropäischen Wirtsvölkern nicht in dermassen bedeutenden Umfange geringer wie die Gebürtlichkeit. Zweitens ist die Sterblichkeit bei den Ostjuden um ein Bedeutendes geringer als bei den östlichen Wirtsvölkern, während die Gebürtlichkeit der Ostjuden derjenigen der Wirtsvölker sehr nahe steht.

Aus dem eben dargelegten folgt, dass der Zuwachs bei den Westjuden allerorts, mit wenigen Ausnahmen, zwei und noch öfter dreimal geringer ist als bei den westlichen Wirtsvölkern; bei den Ostjuden ist der Zuwachs überall, wiederum mit sehr geringen Ausnahmen, höher als der Zuwachs der östlichen Wirtsvölker oder gleicht sich ihm an.

Vergleichen wir miteinander die Ost-und Westjuden. Es ist leicht zu ersehen, dass die Tabelle nach der Stufenreihe der Steigerung der Gebürtlichkeit bei den Juden geordnet ist und unwillkürlich hat sich eine interessante Zusammenstellung von Zahlen ergeben die ersten Zahlen der jüdischen Gebürtlichkeit, wie auch alle darauf folgenden Zahlen der Gebürtlichkeit in den westlichen Ländern und Städten sind ungefähr zweimal geringer als die ersten Zahlen und alle darauf folgenden Zahlen der Gebürtlichkeit in den östlichen Ländern und Städten. Folglich kann man mit Bestimmtheit behaupten, dass zu Beginn des XXten Jahrhunderts die Gebürtlichkeit bei den Westjuden

im allgemeinen um das Doppelte geringer war als bei den Ostjuden. Die Sterblichkeit ist bei den Ostjuden höher als bei den Westjuden, aber der Unterschied ist noch lange nicht so bedeutend wie bei der Gebürtlichkeit: es handelt sich bloss um eine Differenz von einem Viertel bis zu einem Drittel. Der Zuwachs gestaltet sich bei den Ostjuden in einigen Staaten und Städten um das Dreifache höher und in einigen Ortschaften um das Doppelte höher als bei den Westjuden.

Wir hatten die Absicht in der eben analysierten Tabelle ein allgemeines Bild der natürlichen Bewegung der jüdischen Bevölkerung in einem bestimmten Zeitpunkt festzuhalten, weshalb wir einzelne Abweichungen übergangen haben, die leicht durch gelegentliche zufällige Ursachen ihre Erklärung finden können. Aus diesem Grunde lassen wir auch die Angaben für Boston und London ausser Acht, welche dadurch auffallen, dass sie eine ausserordentlich hohe Gebürtlichkeit aufweisen.

Aus der eben untersuchten Tabelle kann auch der bedeutsame Schluss gezogen werden, dass bei der gesamten östlichen Judenheit der Zuwachs zu Beginn des 20ten Jahrhunderts 17-18 pro Mille betrug; bei der gesamten Westjudenheit hat der Zuwachs etwa 6-7 pro Mille betragen. Da im Jahre 1900 in Europa etwa 9 Millionen Juden ansässig waren, von welchen etwa 8 Millionen (samt den ungarischen Juden — ausser Budapest — und den Amsterdamer Juden) zum ostjüdischen Typus gehörten, so glauben wir mit gutem Recht feststellen zu können, dass der natürliche Zuwachs bei den europäischen Juden zu Beginn des 20ten Jahrhunderts etwa 150.000-155.000 Seelen im Jahr betrug. In Amerika lebten im Jahre 1900 1.200.000 Juden, von welchen 900.000 Ostjuden waren. Laut den Angaben über den Zuwachs der Juden in Boston können wir für alle Fälle schliessen, dass der Zuwachs bei den Ostjuden, die nach den Vereinigten Staaten eingewandert waren, grösser war als bei den europäischen Ostjuden. Nehmen wir an, dass der Zuwachs bei den Ostjuden in den Vereinigten Staaten 1 $^1/_2$ mal stärker war als bei den Ostjuden in Europa und dass andererseits der Zuwachs der amerikanischen Westjuden dem westjüdischen Zuwachs in Europa gleichkam, so ergibt der natürliche Zuwachs aller Juden in Nord-Amerika zu Beginn des 20ten Jahrhunderts etwa 25.000 Seelen pro Jahr. Im Ergebnis sehen wir, dass die europäischen mit samt den amerikanischen Juden, welche zusammengenommen in Jahre 1900 92-93 $^0/_0$ der Gesamtzahl der Juden ausmachten, zu Beginn des 20ten Jahrhunderts einen jährlichen Zuwachs von etwa 175.000 bis 180.000 Seelen hatten.

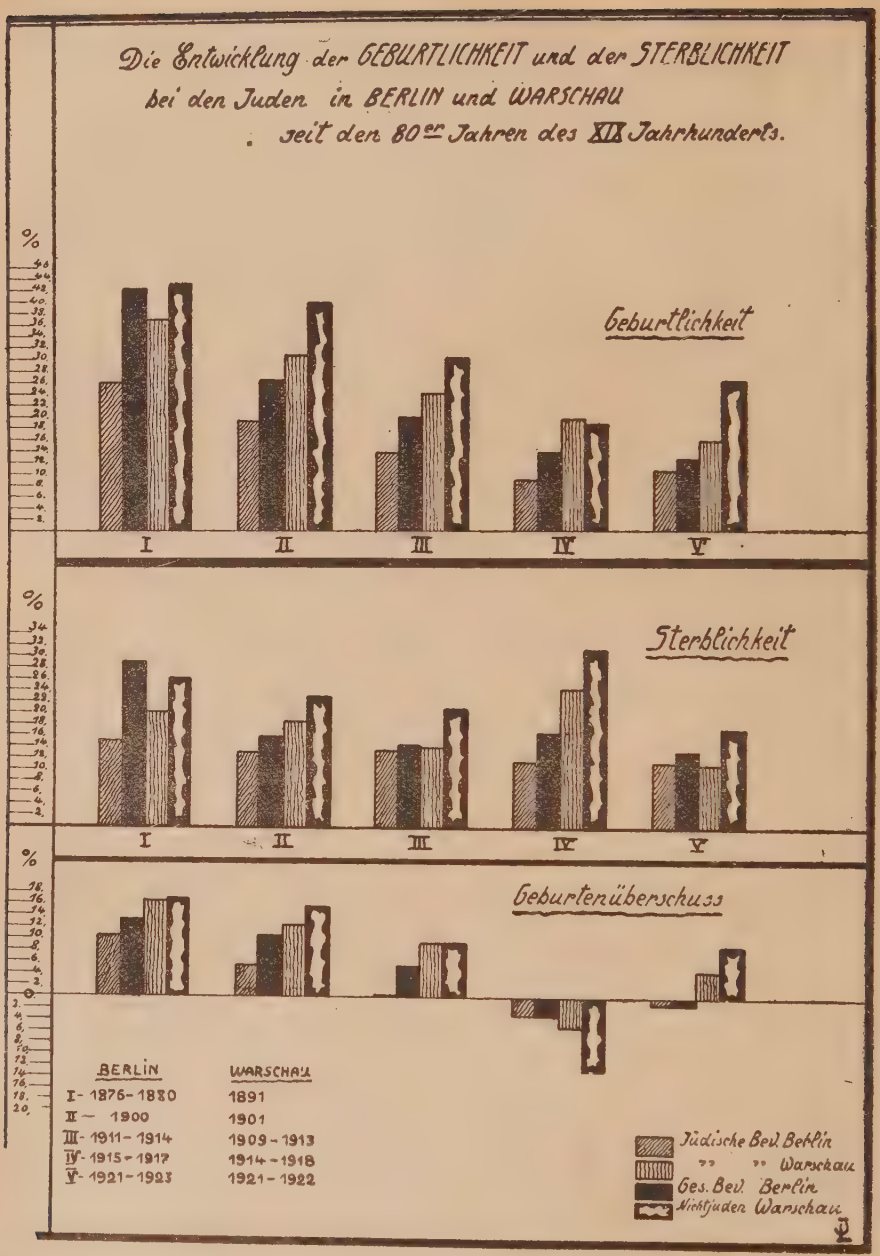
Diese Zahl fällt fast zusammen mit den Angaben über den durch-

schnittlichen Zuwachs vom Jahre 1900 bis zum Jahre 1925, welchen wir an anderer Stelle festgestellt haben. (Blätter für Demographie, Statistik und Wirtschatfskunde der Juden No. 5, 1925) auf Grund einer Vergleichung der allgemeinen Zahl von Juden in beiden Zeitpunkten.

Wir haben in der eben behandelten Tabelle die natürliche Bewegung der jüdischen Bevölkerung in verschiedenen Ländern und Städten in einem bestimmten Zeitpunkt festgehalten. In der folgenden Reihe von Tabellen unternehmen wir den Versuch, die Tendenz der Entwicklung der natürlichen Bewegung der jüdischen Bevölkerung in verschiedenen Ländern und Städten wiederzugeben. Im Hinblick darauf, dass wir fünf Zeitpunkte beleuchten wollen: I) die 80er Jahre des vorigen Jahrhunderts; II) den Beginn des 20ten Jahrhunderts; III) den Vorabend des Krieges; IV) die Kriegsjahre und V) die Nachkriegszeit sehen wir uns genötigt die Zahl der Staaten und Städte zu beschränken, mit den Angaben rechnend, welche für die eine oder andere Ortschaft in allen behandelten Zeitpunkten vorhanden sind.

TABELLE LV-a). — *Entwicklung der Geburtlichkeit seit den 80er Jahren des 19ten Jahrhunderts.*

Länder und Städte	Jüdische Bevölkerung					Gesamtbevölkerung				
	I	II	III	IV	V	I	II	III	IV	V
Preussen	31,7	19,5	15,3	8,6	15,3	38,9	36,3	28,9	16,5	23,8
Ungarn	36,8	33,8	24,7	15,2	15,4	44,4	39,3	34,3	18,0	29,6
Rumänien	46,8	33,4	26,6	10,6	22,5	41,3	41,1	42,7	14,2	38,5
Galizien	46,2	38,2	35,6	—	—	48,0	44,0	41,1	—	—
Frankfurt am Main	22,8	18,0	13,7	8,6	17,5	32,8	30,3	21,3	14,9	19,5
Berlin	26,0	18,0	13,6	8,5	10,4	42,5	26,7	19,9	13,4	12,3
Wien	28,1	22,2	13,4	9,7	14,3	39,9	31,7	18,9	11,6	15,8
Hamburg	29,5	19,1	14,5	8,4	15,0	34,5	28,8	21,5	11,8	17,3
Amsterdam	—	24,8	20,2	19,6	19,2	—	31,5	24,2	22,8	21,7
Budapest	35,8	27.8	18,8	12,6	13,4	38,8	33,4	24,9	15,9	20,4
Warschau	37,0	30,9	23,9	19,5	15.8	43,2	40,1	30,5	18,8	26,1
Petrograd	—	32,6	17,6	13,4	13,9	—	—	27,7	20,4	17,1
Lemberg	—	38,2	29,3	—	23,4	—	41,6	31,4	—	25,0


Die Entwicklung der GEBURTLICHKEIT und der STERBLICHKEIT
bei den Juden in BERLIN und WARSCHAU
seit den 80er Jahren des XIX Jahrhunderts.
%
Geburtlichkeit
I
II
III
IV
V
%
Sterblichkeit
I
II
III
IV
V
%
Geburtenüberschuss
BERLIN
WARSCHAU
I- 1876-1880
1891
II— 1900
1901
III- 1911-1914
1909-1913
IV- 1915-1917
1914-1918
V- 1921-1923
1921-1922
Jüdische Bev. Berlin
" " Warschau
Ges. Bev. Berlin
Nichtjuden Warschau

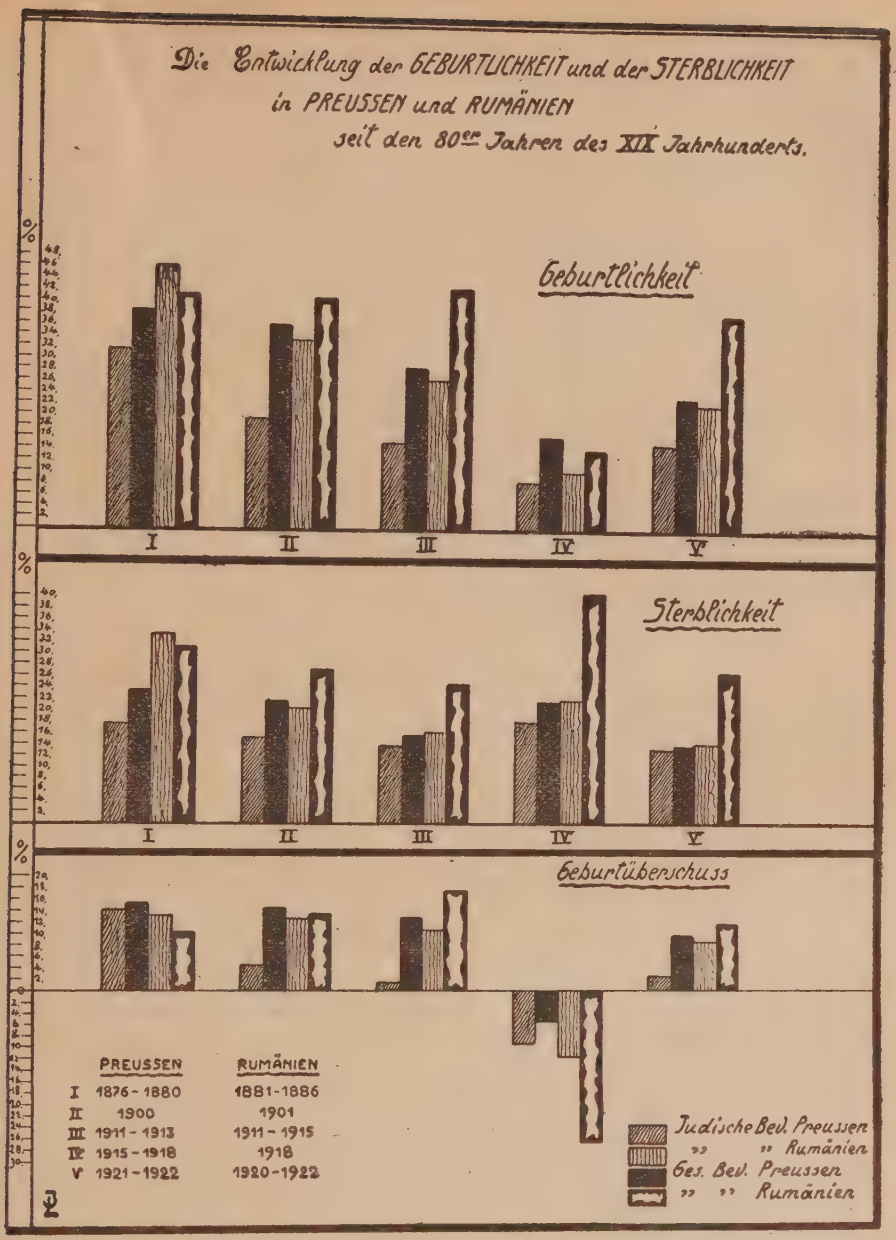

Die Entwicklung der GEBURTLICHKEIT und der STERBLICHKEIT
in PREUSSEN und RUMÄNIEN
seit den 80er Jahren des XIX Jahrhunderts.
Geburtlichkeit
Sterblichkeit
Geburtüberschuss
I
II
III
IV
V
PREUSSEN
RUMÄNIEN
I 1876-1880 1881-1886
II 1900 1901
III 1911-1913 1911-1915
IV 1915-1918 1918
V 1921-1922 1920-1922
Jüdische Bev. Preussen
" " Rumänien
Ges. Bev. Preussen
" " Rumänien

TABELLE LV-*b*). — *Entwicklung der Sterblichkeit seit den 80er Jahren des 19ten Jahrhunderts.*

Länder und Städte	Jüdische Bevölkerung					Gesamtbevölkerung				
	I	II	III	IV	V	I	II	III	IV	V
Preussen	17,6	15,0	13,8	18,0	13,0	23,6	21,7	15,9	21,7	13,9
Ungarn	—	17,0	14,5	16,4	13,9	—	27,2	23,4	23,2	20,6
Rumänien	33,6	20,4	16,1	22,0	14,1	31,3	27,4	24,8	41,0	26,7
Galizien	29,4	19,2	16,6	—	—	36,4	26,9	25,1	—	—
Frankfurt am Main .	14,5	11,8	13,2	15,0	—	20,3	17,2	12,0	15,4	12,8
Berlin	15,3	13,2	13,5	11,7	11,5	29,2	16,2	14,5	16,6	13,4
Wien	14,0	12,9	13,6	15,2	13,1	28,2	24,4	16,0	21,3	14,8
Hamburg	17,5	11,6	—	16,5	16,2	24,7	17,2	13,6	14,2	14,6
Amsterdam	—	12,3	11,0	11,7	10,9	—	17,4	13,0	11,9	11,2
Budapest	22,7	14,0	14,1	18,2	14,6	36,5	23,2	19,0	24,5	20,9
Warschau	20,3	18,6	14,2	24,5	11,1	26,2	23,3	21,0	31,6	17,2
Petrograd	—	14,4	10,6	12,5	26,9	—	—	21,8	22,7	58,1
Lemberg	—	20,2	16,0	—	14,3	—	29,1	20,1	—	18,1

TABELLE LV - *c*). — *Wandlungen des Geburtenüberschusses der jüdischen Bevölkerung in Europa seit den 80 er Jahren des 19 ten Jahrhunderts.*

Länder und Städte	Jüdische Bevölkerung					Gesamtbevölkerung				
	I	II	III	IV	V	I	II	III	IV	V
Preussen. . .	14,1	4,5	1,5	— 9,4	2,3	15,3	14,6	13,0	— 5,2	9,9
Ungarn . . .	—	16,8	9,2	— 1,2	1,5	—	12,1	10,9	— 5,2	9,0
Rumänien . .	13,2	13,0	10,5	—11,4	8,4	10,0	13,7	17,9	—27,2	11,8
Galizien . . .	16,8	19,0	91,0	—	—	11,6	17,1	16,0	—	—
Frankfurt am Main	8,3	6,2	0,5	— 6,4	—	12,5	13,1	9,3	— 0,5	6,7
Berlin. . . .	10,7	4,8	0,1	— 3,2	— 1,1	13,3	10,5	5,4	— 3,2	—1,1
Wien	14,1	9,3	— 0,2	— 5,5	1,2	11,7	7,3	2,9	—10,3	1,0
Hamburg . .	12,0	7,5	—	— 8,1	— 1,2	9,8	11,6	7,9	— 2,4	2,7
Amsterdam . .	—	12,5	9,2	7,9	8,3	—	14,1	11,2	10,9	10,5
Budapest. . .	13,1	13,8	4,7	— 5,6	— 1,2	2,3	10,2	5,9	— 8,6	—0,5
Warschau . .	16,7	12,3	9,7	— 5,0	4,7	17,0	16,8	9,5	—12,8	8,9
Petrograd . .	—	18,2	7,0	0,9	13,0	—	—	5,9	— 2,3	—40,5
Lemberg. . .	—	18,0	13,3	—	9,1	—	12,5	11,3	—	6,9

Bemerkungen: I Die fünf Zeitabschnitte sind:

1) für Preussen: 1876-1880; 1900; 1911-1913; 1915-1918; 1921-1922;

2) für Ungarn: 1881-1885; 1900; 1913-1914; 1915-1918; 1921-1924;

3) für Rumänien: 1881-1886, 1901; 1911-1915; 1918; 1920-1922;

4) für Galizien: 1882; 1901-1902; 1907;

5) für Frankfurt am Main: 1880; 1900; 1911-1914; 1915-1918; 1919-1922;

6) für Berlin: 1876-1880; 1900; 1911-1914; 1915-1917; 1921-1923;

7) für Wien: 1880; 1900; 1911-1914; 1915-1919; 1921-1923;

8) für Amsterdam: 1900; 1908-1911; 1915-1919; 1919-1922;

9) für Hamburg: 1885; 1900; 1911-1914; 1915-1918; 1919-1922;

10) für Budapest: 1876-1880; 1900; 1911-1914; 1915- 1918; 1920-1923;

11) für Warschau: 1891; 1901; 1909-1913; 19 4-1918; 1921-1922;

12) für Petrograd: 1900; 1911-1913; 1914-1917; 1918-1920;

13) für Lemberg: 1901-1902; 1911; 1924;

II. Die Angaben für den Beginn des 20ten Jahrhunderts beziehen sich auf die jüdische und *nichtjüdische* Bevölkerung.

Die erste Aufstellung der angekündigten Tabellenreihenfolge zeigt die Gebürtlichkeit der Juden und Nichtjuden in den aufgezählten fünf Zeitpunkten. Es fällt auf, dass die jüdische Gebürtlichkeit allerorts mit alleiniger Ausnahme von Rumänien schon im ersten Zeitpunkt geringer ist als die Gebürtlichkeit der entsprechenden Wirtsvölker. Wir verweilen vorerst bei den ersten drei vorkrieglichen Zeitpunkten, welche in stärkerem Masse zuverlässige Schlüsse garantieren. In allen von der Aufstellung erfassten Ländern und Städten, mit Ausnahme der Nichtjuden in Rumänien ging die Gebürtlichkeit für die letzten 30 bis 35 Jahre, in der Zeit von den 80er Jahren bis zum Weltkriege, sowohl bei den Juden, als bei den Nichtjuden stark zurück. In allen Staaten, sowohl in den westlichen als auch in den östlichen, und in den *östlichen* Städten ist das Tempo des Fallens der Gebürtlichkeit dei den Juden ein viel stärkeres als bei den Nichtjuden; in den *westlichen* Städten ist das Tempo des Fallens der Gebürtlichkeit bei den Juden und den Nichtjuden fast das gleiche, was sich dadurch erklären lässt, dass bei den Westjuden schon in den 80er Jahren die Gebürtlichkeit eine verhältnismässig niedrige war, während die Gebürtlichkeit bei den Nichtjuden in Westeuropa zu jener Zeit noch eine sehr hohe war und zwar erreichte sie in

Berlin 42,5, in Wien 39,9 pro Mille. Die Judenheit der westeuropäischen Städte machte die erste Periode des besonders schnellen Sinkens der Gebürtlichkeit um einige Jahrzehnte früher durch als die westlichen Nichtjuden und dennoch blieb in den nächstfolgenden Jahrzehnten das Tempo des Sinkens der Gebürtlichkeit bei den Westjuden nicht hinter dem Tempo des Fallens der Geburtenfrequenz bei den Nichtjuden zurück ohne das nichtjüdische Tempo zu überholen. In den 80er Jahren war die Gebürtlichkeit bei den Juden in Berlin schon um 39 % geringer als bei der Gesamtbevölkerung und in Wien um 30 %.

Hinsichtlich des Senkungsgrades der Gebürtlichkeit stehen in erster Reihe die *Städte* Westeuropas, wo sowohl bei der jüdischen als auch bei der nichtjüdischen Bevölkerung die Gebürtlichkeit im untersuchten Zeitabschnitt, von den 80er Jahren bis zum Weltkriege, in einzelnen Siedlungsstätten um die Hälfte, in anderen um ein Drittel gefallen war. In Preussen senkte sich die Gebürtlichkeit im untersuchten Zeitabschnitt bei den Juden um 35,1 %, bei den Nichtiuden jedoch nur um 22,5 %. In den osteuropäischen Ländern fiel die Gebürtlichkeit bei den Juden im untersuchten Zeitabschnitt bedeutend stärker als bei den Nichtjuden-die jüdische Gebürtlichkeit fiel in den östlichen Ländern wie folgt: in Rumänien um 43,2 %, in Ungarn um 32,9 %, in Galizien um 23,9 %; bei den Nichtjuden senkte sich die Gebürtlichkeit in der entsprechenden Zeitspanne: in Ungarn um 23,0 %, in Galizien um 11,2 %, in Rumänien erhöhte sie sich sogar um ein Geringes.

Ein Vergleich des Tempos des Sinkens der Gebürtlichkeit in der untersuchten Zeitspanne bei den Juden im Westen und im Osten zeigt, dass die Westjuden überhaupt ein stärkeres Fallen der Geburtenfrequenz aufzuweisen haben als die Ostjuden. Es darf hierbei nicht unerwähnt bleiben, dass zu Beginn des untersuchten Zeitabschnittes, d. h. in den 80er Jahren die Gebürtlichkeit bei den westlichen Juden hinter der Gebürtlichkeit der Ostjuden schon um ein bedeutendes zurückstand.

Was das Tempo des Fallens der Gebürtlichkeit im ersten Zeitabschnitt (1880 bis 1900) und in der zweiten Zeitspanne (1900-1914) betrifft, so fällt es hinsichtlich der Juden schwer irgend eine Gesetzmässigkeit aufzudecken; bei den Nichtjuden jedoch nimmt das Senkungstempo der Gebürtlichkeit in allen Ländern und Städten im zweiten Zeitabschnitt an Schnelligkeit zu.

Wir gehen zur Kriegs-und Nachkriegszeit über. In den Kriegsjahren fällt die Gebürtlichkeit allerorts, sowohl bei den Juden als

auch bei den Nichtjuden. In einigen Ländern und Städten um die Hälfte, in anderen um ein Drittel, bei den Nichtjuden in Rumänien sogar um zwei Drittel. In den Nachkriegsjahren hat die nichtjüdische Bevölkerung in keinem Lande und in keiner Stadt ihre vorkriegliche Geburtenfrequenz erreicht. Bei den Juden in Preussen und in einigen westlichen Städten hat die Gebürtlichkeit in den Nachkriegsjahren die Höhe der Vorkriegsjahre erreicht, in den östlichen Ländern und Städten jedoch hatte sich die Gebürtlichkeit in den Nachkriegsjahren in keiner der Siedlungsstätten dermassen erhöht, dass die Vorkriegshöhe erreicht wurde. Das östliche Judentum hat nicht nur durch die Kriegsereignisse und ihre unmittelbaren Folgen zu leiden gehabt, sie war in der Kriegsfolge grauenhaften Pogromen und verheerenden Epidemien ausgesetzt und ist in den Nachkriegsjahren in eine furchtbare wirtschaftliche Krise geraten, die Millionen von Juden in elende Hungerleider verwandelt hat — aus diesen Gründen fällt es der östlichen Judenheit begreiflicherweise besonders schwer sich zu der vorkrieglichen Lebensweise zu erheben.

Die zweite Aufstellung der Tabellenreihenfolge beleuchtet die Entwicklung der Sterblichkeit in denselben Zeitabschnitten und in denselben Ortschaften wie in der vorhergehenden Tabelle. Wir verweilen auch hier vorerst bei den ersten drei Zeitabschnitten. Wir haben hier eine höchst bemerkenswerte Erscheinung vor uns — bei der Gesamtbevölkerung fällt in allen Ländern und Städten die Sterblichkeit fortwährend, wobei das Senkungstempo der Sterblichkeit mit dem Tempo des Fallens der Gebürtlichkeit in beiden Zeitabschnitten allgemein Schritt hält. Nicht so regelmässig fällt die Sterblichkeit bei den Juden: im ersten Zeitbschnitt (1880 bis 1900) sinkt die jüdische Sterblichkeit in fast gleichem Verhältnis mit der Gebürtlichkeit; im zweitem Zeitabschnitt setzt sich das Fallen der jüdischen Sterblichkeit in allen Ländern und Städten Osteuropas und auch in Preussen fort, in den Städten Westeuropas steigt jedoch die jüdische Sterblichkeit in einzelnen Punkten und in anderen westeuropäischen Siedlungsstätten bleibt die jüdische Sterblichkeit auf der Höhe des Jahres 1900 stehen. Freilich war die Steigerung der jüdischen Sterblichkeit in einzelnen Siedlungsstätten sehr unbedeutend, jedoch ist diese Steigerung sehr charakteristisch, wenn man bedenkt, dass allgemein die Sterblichkeit bei den Westjuden noch nicht so gering ist, dass sie an jene natürliche Grenze stösst, die zu überschreiten es bis heute der Menschheit noch nicht gegeben war.

Es ist leicht möglich, dass diese verhältnismässig hohe Sterblichkeit der Westjuden, welche schon im ersten Jahrzehnt des 20ten

Jahrhunderts zu fallen aufhörte, in der Alterszusammensetzung der Westjuden ihre Erklärung findet. Aus der Tabelle II haben wir ersehen, dass die Altersgruppe über 60 Jahre bei den Westjuden etwa zweimal so zahlreich ist als bei den Ostjuden und etwa 1 ½ mal stärker vertreten ist als bei den westeuropäischen Wirtsvölkern. Da die Gebürtlichkeit bei den Westjuden fortlaufend zurückgeht, so kann daran nicht gezweifelt werden, dass die an und für sich schon schmale Basis der Alterspyramide bei den Westjuden fortlaufend schmäler wird, was zu einer entsprechenden Verbreiterung der von uns zu Beginn unserer Untersuchung gekennzeichneten Spitze der Pyramide führen muss; diese verbreiterte Spitze der Pyramide weist von sich aus auf die Tendenz einer erhöhten Sterblichkeit hin. Zweifellos haben wir hier die Vorboten der traurigen Zukunft des Westjudentums vor uns, die ihren Ausdruck in der Erscheinung finden wird, dass die Gebürtlichkeit der Juden ihre Sterblichkeit nicht nur infolge der niedrigen jüdischen Gebürtlichkeit nicht wett machen wird, sondern auch infolge der verhältnismässig hohen Sterblichkeit; ihrer seits ist diese verhältnismässig hohe jüdische Sterblichkeit eine Folge der Erhöhung des Schwergewichts der hohen Altersgruppen im Westjudentum.

Eine Bestätigung des eben Ausgeführten finden wir in den Angaben über die Sterblichkeit der Ost-und Westjuden in Nordamerika. Dr. John S. Billings hat Angaben über 10.618 jüdische Familien gesammelt, die eine Kopfzahl von 60.630 Personen darstellten, welche in den Vereinigten Staaten zum 31. Dezember 1889 ansässig waren. Die Todesfälle betrugen in diesen Familien in dem Jahrfünft 1888-1889 10,0 auf 1000 Seelen, was nach der Ansicht von Billings etwa die Hälfte des Sterblichkeitskoëffizienten der nichtjüdischen Bevölkerung derselben sozialen Schicht, wie die untersuchten jüdischen Familien beträgt. Prof. Barnett, der die Sterblichkeit bei den Juden in Baltimore für die Jahre 1889, 1900 und 1901 erforscht hat, kommt zum Schluss, dass die jüdische Sterblichkeit viel niedriger als die nichtjüdische Sterblichkeit in dieser Stadt war. Während der Sterblichkeitskoeffizient bei den Nichtjuden in Baltimore 18 pro Mille betrug, stellte er sich bei den deutschen Juden in Baltimore bloss auf 14 pro Mille und bei den russischen Juden auf 13 pro Mille. Dr. Dublin bringt Angaben, welche beweisen, dass die Sterblichkeit bei den russischen Juden in New York im Jahre 1910 beim männlichen Geschlecht 7,5 und beim weiblichen 6,6 pro Mille betrug. Dr. Bernheimer, einer der besten jüdischen Statistiker in Amerika, nimmt an, dass die durchschnittliche Sterblichkeit bei den Juden in den

Städten Nordamerikas etwa 8 pro Mille beträgt (« The Jewish Population of Cities in the United States » in der Zeitschrift « The Jewish Social Service Quarterly » Dezember 1925, Philadelphia).

Wir sind der Ansicht, dass die verhältnismässig geringe Sterblichkeit der amerikanischen Juden in bedeutendem Masse durch ihre besonders geartete Alterszusammensetzung erklärt werden kann, die sich durch ein Übergewicht von Einwanderern mittlerer Altersgruppen kennzeichnet. Die verhältnismässig hohe Sterblichkeit der *deutschen* Juden in Amerika, die ein halbes Jahrhundert vor den russischen Juden nach Amerika eingewandert waren, und die in ihrer Mehrheit zu den höheren besser situierten gesellschaftlichen Schichten gehören als die eingewanderten russischen Juden, welche sich noch nicht völlig von den russischen Pogromgreueln und von dem Hungerdasein in Russland erholt haben, ist wiederum durch den Unterschied in der Alterszusammensetzung dieser beiden Altersgruppen zu erklären. Es kann nicht angezweifelt werden, dass die amerikanischen deutschen Juden, welche, wie ihre Stammesgenossen im deutschen Mutterlande, sich schon ein halbes Jahrhundert durch niedrige Gebürtlichkeit auszeichnen, ein Übergewicht von höheren Altersgruppen aufweisen, welche eine drohende Wirkung auf die Sterblichkeit ausüben.

Wir kehren zur begonnenen Analyse der Sterblichkeitstabelle zurück. Mit geringen Ausnahmen ist die jüdische Sterblichkeit überall in allen Zeitabschnitten niedriger als bei der umgebenden Bevölkerung. Die Juden in Rumänien weisen in den 80er Jahren eine viel höhere Sterblichkeit auf als die Nichtjuden, was dadurch erklärlich wird, dass die jüdische Gebürtlichkeit in noch bedeutenderem Masse die allgemeine Gebürtlichkeit überragt als die jüdische Sterblichkeit die allgemeine Sterblichkeit. In Frankfurt am Main und Hamburg ist die jüdische Sterblichkeit höher in den Jahren, welche dem Kriege vorausgingen, was wahrscheinlich seine Erklärung in den Feststellungen findet, die wir über die Sterblichkeit der Westjuden in Verbindung mit ihrer Alterszusammensetzung gemacht haben.

Was das Tempo des Fallens der Sterblichkeit betrifft, so ist dieses bei den Ostjuden intensiver als bei den östlichen Wirtsvölkern und auch als bei den Westjuden; bei den Westjuden jedoch ist dieses Tempo bedeutend schwächer als bei den westlichen Wirtsvölkern. Diese Erscheinung ist dadurch hervorgerufen, dass die Westjuden schon in den 80er Jahren eine verhältnismässig niedrige Sterblichkeit hatten, während die Sterblichkeit bei den westlichen

Wirtsvölkern und bei den Ostjuden zu jener Zeit noch eine sehr hohe war. Während in den 80er Jahren die Sterblichkeit der Westjuden um ein Drittel, und in manchen Ortschaften sogar um die Hälfte, geringer war als bei der umgebenden Bevölkerung und bei den Ostjuden, war am Vorabend des Krieges der Unterschied in den Sterblichkeitskoeffizienten dieser drei Bevölkerungsgruppen ein sehr geringer. Bei den Warschauer Juden und sogar bei den Lemberger Juden war die Sterblichkeit kurz vor dem Kriege fast gar nicht höher als bei den Juden in Berlin und Wien, trotzdem die Geburtlichkeit bei den ersteren in jener Zeit mehr als zweimal [Lemberg] und zweimal [Warschau] höher war als bei den Juden in Berlin und Wien; bei den Nichtjuden in Berlin und Wien war die Sterblichkeit fast gar nicht höher als bei den Juden, während die Gebürtlichkeit bei den Nichtjuden 1 $^1/_2$ mal grösser war als bei den Juden in diesen Städten.

Während des Krieges stieg die Sterblichkeit in allen Staaten und Städten durchschnittlich um ein Drittel, bezw. um ein Viertel, ausser Warschau, wo die Erhöhung der Sterblichkeit noch bedeutender war, Rumänien, wo die Sterblichkeit bei den Nichtjuden besonders stark gestiegen war, und Berlin, wo die Sterblichkeit sogar etwas zurückgegangen war, — eine Erscheinung die besonderer Prüfung und Erforschung bedarf. Einen grossen Unterschied sehen wir allgemein hinsichtlich der Sterblichkeit zwischen Juden und der sonstigen Bevölkerung nicht. Nach dem Kriege fiel die Sterblichkeit überall, bei Juden sowie bei Nichtjuden, mit Ausnahme von Petrograd, wo wir Angaben leider nur für die Jahre 1918 bis 1920 besitzen, in welchen Jahren in Russland noch Hunger und Terror herrschten und der Krieg noch auf verschiedenen Fronten weiter geführt wurde. Spätere Angaben von Petrograd besagen, dass die Sterblichkeit dort bedeutend zurückgegangen ist und die Vorkriegshöhe nicht überschreitet.

Wir sind zur dritten Aufstellung der Tabellenreihe gelangt — zum Zuwachs, dem wichtigsten Moment der natürlichen Bevölkerungsbewegung, ihrem Zweck sozusagen.

Es genügt einen oberflächlichen Blick auf die Tabelle zu werfen, um festzustellen, um wieviel in 30-35 Jahren, von den 80er Jahren bis zum Kriege, sich die Lage geändert hat. In den 80er Jahren war die Bevölkerungslage der Westjuden die günstigste: die Gebürtlichkeit der Westjuden war schon damals eine sehr niedrige, gleichzeitig war aber auch die Sterblichkeit für jene Zeit eine so auffallend niedrige, dass die Bevölkerungsbilanz der Westjuden dermassen

günstig war, dass sie nicht hinter der Bilanz jener Bevölkerungsgruppen zurückstand, die eine sehr hohe Gebürtlichkeit aufwiesen. Man könnte glauben, dass die Weltjudenheit zu jener Zeit das Ideal verwirklicht hat, welches darin besteht, ein Maximum von einer nicht grossen, aber vollständig ausreichenden Zahl von Neugeborenen am Leben zu erhalten. Das Bevölkerungsideal besteht doch nicht in der grossen Zahl von Geburten, sondern in der Erhaltung einer grösstmöglichsten Zahl von Kindern am Leben. Bei den Ostjuden und bei den westlichen Wirtsvölkern war die Gebürtlichkeit in den 80er Jahren eine sehr hohe, aber auch die Sterblichkeit war bei diesen Bevölkerungsgruppen eine dermassen hohe, dass die Vorteile der hohen Gebürtlichkeit fast verloren gingen. Im Ergebnis sehen wir, dass die Westjuden, welche ihre Kräfte, die eine Kinderzeugung fordert, sparten, keine ungünstigere Bevölkerungsbilanz hatten als die im Überfluss Kinder gebärenden Ostjuden und die nichtjüdische Bevölkerung.

Tatsächlich war der Zuwachs bei den Juden in Preussen in den 80er Jahren sogar etwas höher als bei den Juden in Rumänien, nur um ein Sechstel geringer als bei den galizischen Juden, trotzdem die rumänischen und galizischen Juden ihre Kraft in viel stärkerem Masse durch Geburten in Anspruch nahmen [um 1 $^1/_2$ mal] als die preussischen Juden. Die preussische Judenheit hatte in jener Zeit einen Zuwachs, der bloss um 8 % geringer war als bei den westlichen Wirtsvölkern, trotzdem die Wirtsvölker zu jener Zeit um 18,5 % Kinder mehr zur Welt brachten als die Juden. Die Wiener Judenheit hatte einen Zuwachs, der um 15,5 % geringer war als der Zuwachs der Warschauer Juden, während die Wiener Juden um 31,6 % weniger Kinder zeugten als die Warschauer Juden. Im Verhältnis zur nichtjüdischen Bevölkerung Wien's gestaltete sich die Lage der Wiener Juden besonders günstig — die Wiener Juden zeugten um 30 % weniger Kinder als die Nichtjüden und hatten trotzdem einen Zuwachs, der um 25 % den nichtjüdischen Zuwachs überragte. Hier tritt mit besonderer Deutlichkeit die unumstrittene Tatsache in Erscheinung, dass in der Sorge um die Zukunft der Menschheit der Kampf mit der Sterblichkeit das weit wichtigste Moment ist. Das Fallen der Gebürtlichkeit, welches von einem entsprechenden Sinken der Sterblichkeit begleitet wird, wie das bei den Westjuden in den 80er Jahren der Fall war, zeigte sich als *positiver* Faktor. Bei viel geringerer Beanspruchung der physischen und materiellen Kräfte erzielten die Westjuden kein schlechteres Ergebnis in der Bevölkerungsbilanz als die westlichen Wirtsvölker und die Ostjuden. Erst

in der Zeit nach den 80er Jahren, als das Sinken der Sterblichkeit von dem Sinken der Gebürtlichkeit überholt wird, was in den darauf folgenden Jahren noch in stärkerem Masse zum Ausdruck kam, begannen sich die schlechten Folgen der Regulierung der Kinderzeugung, besser gesagt der Flucht vor dem Kinde, einzustellen. Während in den 80er Jahren der Zuwachs bei den Westjuden allgemein nicht geringer war als bei den Ostjuden, war er zu Beginn des 20ten Jahrhunderts schon bedeutend niedriger als der ostjüdische Zuwachs, z. B. war der Zuwachs des preussischen Judentums 4 mal geringer als bei den galizischen Juden und um 3 mal geringer als bei den rumänischen Juden; bei den Berliner Juden war er zu Beginn des 20ten Jahrhunderts um 4 mal geringer als der Zuwachs bei den Juden in Lemberg und um 3 mal geringer als der Zuwachs bei den Juden in Warschau. Beim Vergleich mit der nichtjüdischen Bevölkerung zeigt es sich, dass bei den preussischen Juden der Zuwachs um 3 mal geringer als bei der preussischen Gesamtbevölkerung war; bei den Berliner Juden war der Zuwachs mehr als um das Doppelte geringer als bei der Gesamtbevölkerung Berlins.

Es genügt einen oberflächlichen Blick auf die vorhergehenden Tabellen zu werfen, um zu sehen, dass diese ungünstige Bevölkerungslage der Westjuden zu Beginn des 20ten Jahrhunderts durch das sehr schnelle Fallen der Gebürtlichkeit bei den Juden hervorgerufen ist, mit welcher der Rückgang der Sterblichkeit nicht Schritt hielt. Andererseits holte bei den Ostjuden das Sinken der Sterblichkeit das Fallen der Geburten ein. Gerade diese Disproportionalität zwischen dem Tempo des Fallens der Gebürtlichkeit und dem Tempo des Fallens der Sterblichkeit bildet das entscheidende Moment für das Ergebnis der natürlichen Bewegung der Bevölkerung — fällt dieses Moment zu Gunsten der Sterblichkeit aus, wie bei den Ostjuden, so ergibt das Fallen der Gebürtlichkeit, welche seinen Teilfaktor des Fallens der Sterblichkeit darstellt, eine positive Wirkung. Im Gegenteil, wenn die erwähnte Disproportionalität zu Gunsten der Gebürtlichkeit ausfällt, wie es bei den Westjuden der Fall ist, dann wird das Fallen der Gebürtlichkeit für die betreffende Bevölkerungsgruppe verhängnisvoll.

Bei der nichtjüdischen Bevölkerung der westlichen Länder bestand im allgemeinen bis zu Beginn des 20ten Jahrhunderts eine Harmonie zwischen dem Tempo des Fallens der Gebürtlichkeit und dem Tempo des Fallens der Sterblichkeit, mit einigen geringen Abweichungen in einigen Ortschaften in der einen oder anderen Richtung. Bei der nichtjüdischen Bevölkerung der östlichen Länder erhöhte sich der Zuwachs für die Zeit seit den 80er Jahren bis zu

Beginn des 20ten Jahrhunderts, da bei dieser Bevölkerungsgruppe das Sinken der Sterblichkeit das Fallen der Gebürtlichkeit überholte — die Disproportionalität zu Gunsten der Sterblichkeit erwies sich für die Bevölkerungsbilanz günstig.

Wir gehen zum dritten Zeitabschnitt unserer Tabelle über, zur Zeit kurz vor dem Kriege. In allen Ländern und Städten ging im ersten Jahrzehnt des 20ten Jahrhunderts der Zuwachs zurück, bei den Juden mehr, bei den Nichtjuden weniger — mit Ausnahme von Rumänien, wo die Gebürtlichkeit bei den Nichtjuden stieg, und Galizien, wo die Gebürtlichkeit bei den Juden auf derselben Höhe verblieb und bei den Nichtjuden um 6 % zurückgegangen war. In allen Ländern und Städten, mit Ausnahme von Warschau, ging der Zuwachs bei den Juden in stärkerem Masse zurück als bei Nichtjuden. Der Zuwachs der preussischen Juden, der schon vordem ein sehr geringfügiger war, ging in der untersuchten Zeit um das Doppelte zurück, bei der Gesamtbevölkerung in derselben Zeit aber bloss um ein Zehntel; bei den ungarischen Juden ging der Zuwachs in der entsprechenden Zeit um 45 % und bei der umgebenden Bevölkerung bloss um 10 % zurück; in Frankfurt am Main ging der Zuwachs bei den Juden um das Zwölffache, bei den Nichtjuden bloss um 29 % zurück; in Berlin und Wien fiel der Zuwachs trotz des Vorhandenseins von grossen ostjüdischen Kolonien in diesen Städten, welche die tatsächlichen Bevölkerunsverhältnisse der Westjuden verwischen, bis auf Null zurück oder gestaltete sich sogar negativ; in Lemberg ging der Zuwachs bei den Juden um ein Viertel, bei der Gesamtbevölkerung um 10 % zurück.

Es ergibt sich ein sehr klares, aber auch ein sehr trauriges Bild: während in den 80er Jahren der verhältnismassig hohe Zuwachs der Juden im allgemeinen auf derselben Höhe mit dem Zuwachs der Gesamtbevölkerung stand, war die Lage kurz vor dem Kriege von Grund aus verschieden: der natürliche Zuwachs der jüdischen Bevölkerung schlug eine ganz andere Richtung ein, welche die Westjuden sogar zu einer negativen Bevölkerungsbilanz führte. Man muss diesbezüglich im Auge behalten, dass der bedeutende Zuwachs der Juden zu jener Zeit nicht nur hauptsächlich durch eine verhältnismässig hohe Gebürtlichkeit hervorgerufen war, sondern auch durch eine niedrige Sterblichkeit; während bei den Nichtjuden der hohe Zuwachs in der Hauptsache in der starken Überzahl von Geburten seine Erklärung findet. Nach dem Verlauf von 30 bis 35 Jahren gestaltete sich die Bevölkerungsbewegung der Nichtjuden in Westeuropa eben so günstig wie sie bei den Westjuden in den 80er Jahren war — die Geburtenfrequenz

blieb noch genügend hoch und die Sterblichkeit sank besonders tief.

Die Tabelle zeigt, das der Zuwachs der Ostjuden trotz seines Sinkens sich günstiger gestaltete als bei den Westjuden. Das galizische Judentum zeigt vor dem Kriege noch einen Zuwachs von 19.0 pro Mille, diese Angaben beziehen sich auf das Jahr 1907; wir sind der Ansicht, dass der Zuwachs den rumänischen Juden — 10,5 pro Mille — näher dem typischen ostjüdischen Zuwachs ist als der galizische Zuwachs. Wir wollen in das Gedächtnis des Lesers den Umstand zurückrufen, dass die Angaben über den Zuwachs in den grossen und mittleren Städten Russlands im Jahre 1910 dem Zuwachs der rumänischen Juden näher stehen als dem Zuwachs der galizischen Juden. Wir glauben genügend optimistich zu sein, wenn wir annehmen, dass im Durchschnitt das gesamte östliche Judentum in den Jahren kurz vor dem Kriege einen Zuwachs von etwa 12 pro Mille aufweist in der Zeit als die Westjuden einen äusserst geringfügigen Zuwachs zeigten. Wir wollen hinzufügen, dass die jüdische Gebürtlichkeit in den Flecken Russlands kurz vor dem Kriege ziemlich niedriger war — das wurde nicht so sehr durch die neue Zeitwehungen hervorgerufen, die nach dem Jahre 1905 in die entlegensten Nester der russischen Provinz drangen, sondern durch die Alterszusammensetzung der Juden in den russischen Flecken. Es ist ja bekannt, dass in den russischen Flecken bloss die höheren Altersgruppen und Kinder verblieben, während die Mehrheit der mittleren arbeitsfähigen Altersgruppen nach den grösseren Städten und nach Amerika auswanderten.

Wenn man den Versuch macht, die Ergebnisse des natürlichen Zuwachses der jüdischen Bevölkerung in den drei untersuchten Zeitabschnitten zusammenzufassen, so kommt man an der Hand des von uns bekanntgegebenen Materials zu folgendem Schluss:

Der natürliche Zuwachs betrug pro Mille jüdischer Bevölkerung:

	bei den Ostjuden	bei den Westjuden
1) in den 80er Jahren des 19en Jahrhunderts	17-18	12-14
2) zu Beginn des 20ten Jahrhunderts	17-18	6-7
3) kurz vor dem Kriege	12-13	2-3

Die ungarischen Juden haben wir dabei in zwei Gruppen geteilt — die Budapester Juden zählen zu den Westjuden, die übrigen ungarischen Juden zu den Ostjuden; die Amsterdamer Juden gehören zu den Ostjuden.

Wenn man annimmt, dass im Jahre 1880 es in der ganzen Welt 8 Millionen Juden gab, von welchen 90 % in Europa lebten, und im Jahre 1914 14 Millionen Juden gezählt wurden, von denen 70 % in Europa lebten, so ist der annähernde jährliche Zuwachs der europäischen Juden leicht festzustellen:

im Jahre 1880	130-140.000
im Jahre 1900	150-155-000
im Jahre 1914	110-115-000

Wir sind überzeugt, dass diese Zahlen der Wirklichkeit sehr nahe sind. In einer anderen Arbeit, die von der mechanischen Bewegung der jüdischen Bevölkerung handelt, werden wir versuchen die Richtigkeit dieser Zahlen zu bekräftigen.

Wir verweilen noch kurz bei den zwei letzten Zeitabschnitten — den Kriegsjahren und der Nachkriegszeit.

Mit Ausnahme von Amsterdam gestaltete sich der Zuwachs allerorts in den Kriegsjahren negativ, was hauptsächlich, verständlicherweise, durch die erhöhte Sterblichkeit in den Kriegsjahren hervorgerufen wurde. An erster Stelle steht Rumänien, welches während des Krieges eine Unterbilanz von 27,2 pro Mille der Gesamtbevölkerung und von 11,4 pro Mille bei den Juden zu verzeichnen hatte; Rumänien folgt Warschau mit einer Unterbilanz bei den Juden von 12,8 pro Mille, bei den Juden in Preussen betrug die Unterbilanz 9,4 pro Mille. Wie hier, so auch dort ist diese hohe Unterbilanz mehr der sinkenden Gebürtlichkeit als der erhöhten Sterblichkeit zuzuschreiben.

Was die Nachkriegszeit betrifft, so ist mit wenigen Ausnahmen, die durch besondere Ursachen hervorgerufen sind, die Bevölkerungsbilanz positiv, jedoch ist der Zuwachs überall geringer als in den Vorkriegsjahren. In Petrograd weisen die Nichtjuden eine sehr bedeutende Unterbilanz von 40,5 pro Tausend auf, bei den Juden ist die Unterbilanz nicht so hoch, sie beträgt 13,0 pro Mille, was durch die Ursachen, von welchen vorhin die Rede war, hervorgerufen ist.

Sehr ungünstig erwies sich die Lage nach dem Kriege in Berlin und Budapest, wo sowohl die Juden als auch die Nichtjuden eine Unterbilanz in der Bevölkerungsbewegung beibehielten; auch in Hamburg verblieb der Zuwachs bei den Juden negativ und bei den Nichtjuden gestaltete er sich um das Dreifache geringer als kurz vor dem

Kriege. Es genügt sich der furchtbaren politischen und wirtschaftlichen Krisen zu entsinnen, welche diese Städte in den ersten Nachkriegsjahren durchgemacht haben, um die ungünstige Bevölkerungslage verstehen zu lernen.

Es ist heute noch schwer Schlüsse über die Bevölkerungsbewegung in den ersten Nachkriegsjahren auf Grund der vorhandenen Materialien zu ziehen, da die meisten Länder Europas weder zu einem wirtschaftlichen Gleichgewicht noch zu einer politischen Beruhigung gelangt sind, deshalb wollen wir uns bloss mit der Feststellung der Tatsache begnügen, dass in keinem Lande und in keiner Stadt der Zuwachs nach dem Kriege die vorkriegliche Höhe erreicht hat, während in einigen Städten der Zuwachs sogar negativ verblieb.

*
* *

Wir sind am Ende unserer Arbeit. Wir wissen, dass unsere Arbeit der Mängel nicht entbehrt, welche oft durch das vollständige Fehlen von Angaben über das eine oder das andere Land und von der Art der vorhandenen Angaben abhängen, aber auch von uns verschuldete Fehler sind wahrscheinlich nicht vermieden worden. Wir geben uns jedoch der Hoffnung hin, das das von uns gesammelte und bearbeitete Material in gewissem Masse zur Klärung der wichtigen und verwickelten Probleme beitragen wird, welche in der Arbeit berührt worden sind. Berührt und angedeutet jedoch sind in unserer Arbeit alle grundlegenden allgemeinen Probleme der natürlichen Bewegung der Bevölkerung.

Die Gebürtlichkeit bei verschiedenen sozialen Gruppen und Klassen und bei verschiedenen Nationen, bei zurückgebliebenen und kulturell hochstehenden Gemeinschaften; das Fallen der Gebürtlichkeit bei verschiedenen sozialen Gruppen und Klassen und bei einzelnen Teilen der Nationen, die auf verschiedenen Kultustufen stehen; das Tempo dieses Fallens bei verschiedenen Völkern und bei verschiedenen Teilen eines und desselben Volkes, die sich durch ihre besondere Lebensweise auszeichnen; das Fallen der Sterblichkeit, welches das Fallen der Gebürtlichkeit begleitet; die Abhängigkeit der Sterblichkeit von der sozialen und kulturellen Lage; die Abhängigkeit der Sterblichkeit vom Altersaufbau; das Tempo des Fallens der Sterblichkeit und seine Abhängigkeit vom Tempo des Fallens der Gebürtlichkeit; Säuglingssterblichkeit und Kindersterblichkeit und ihr Einfluss auf die allgemeine Sterblichkeit; der Zuwachs und die Tendenz seiner Entwicklung in den letzten fünfzig Jahren; die Vorteile eines Zu-

wachses, der durch eine niedrige Sterblichkeit erzielt ist, gegenüber dem Zuwachs infolge einer hohen Gebürtlichkeit u. s. w., — auf alle diese grundlegenden Probleme der natürlichen Bewegung der Bevölkerung wirft das gebrachte Material, welches eine grosse Zahl von Ländern und Städten umfasst und welches von einer bedeutenden Anzahl von Völkern und Klassen handelt, ein grelles Licht.

Den Mittelpunkt unseres Interesses aber bildet das Schicksal des jüdischen Volkes, die Wege seiner Entwicklung und die Aussichten für seine Zukunft. Mit einem ruhigen Gewissen können wir behaupten, dass die Stimmen über eine *Degeneration* des Judentums in der Diaspora, welche die jüdische Oeffentlichkeit schon ein halbes Jahrhundert lang beunruhigen, *biologisch* nicht begründet sind. Gewiss sind am jüdischen nationalen Lebensbaum verdorrte und allmählich verdorrende Zweige vorhanden, das sind aber jene dürren Zweige, welche sich von der Wurzel des nationalen Lebensbaumes zu weit entfernt haben und aufgehört haben frische nationale Lebenssäfte in sich aufzunehmen der Stamm des Baumes aber, die östliche Judenheit, erweist sich gesund und fruchttragend. Gerade die östliche Judenheit hatte vor dem Kriege einen Zuwachs, der nicht geringer war als der Zuwachs des deutschen Volkes! In bloss 35 Jahren, von 1880 bis 1914, hat sich die östliche Judenheit fast verdoppelt, wenn man die Ostjuden in Amerika hinzurechnet! Die günstige Bevölkerungsbilanz der Ostjuden ist auf dem vorteilhaftesten Wege zustandekommen — durch eine sehr niedrige Sterblichkeit und eine verhältnismässig nicht hohe Gebürtlichkeit. Derjenige Teil der Ostjudenheit, welcher nach Amerika verpflanzt war, hat in ganz besonderem Masse die Methoden des Kampfes mit der Sterblichkeit vervollkommt, und so war er auch in der Lage seine Fruchtbarkeit zu erhöhen. Es scheint uns, als ob das amerikanische östliche Judentum eine einzigartige Erscheinung in der Bevölkerungsbewegung ist; bei einer sehr hohen Gebürtlichkeit weist es eine hervorragend geringe Sterblichkeit auf.

Biologisch hält das Ostjudentum einen Vergleich mit den gesündesten und fruchtbarsten Völkern in Europa aus und erweist sich noch in der Hinsicht im Vorteil, dass es bei einem viel geringeren Aufwand von Kräften im Verhältnis zu anderen Völkern dasselbe Ergebnis erzielt, denn die Judenheit hat sich schon lange die alte weise Regel von der Oekonomie der Kräfte zu eigen gemacht: *nicht viel Sprösslinge erzeugen, sondern möglichst viele am Leben erhalten.*

QUELLEN

1. Jahrbücher des Preussischen Statistischen Landesamtes. 1913-1925 Berlin.
2. Preussische Statistik. Geburten, Sterbefälle und Eheschliessungen. 1921-1924 Berlin, Heft 270, 272, 276.
3. Statistisches Jahrbuch der Stadt Berlin. 34. Jahrgang 1920.
4. Statistisches Taschenbuch der Stadt Berlin. Ausgabe des Städtischen Statistischen Amtes. 1926.
5. Beiträge zur Statistik der Stadt Frankfurt am Main. XII. Heft. Neue Folge 1922.
6. Statistische Jahresberichte der Stadt Frankfurt am Main. 1920. Ausgabe für die Jahre 1917/18 und 1918/19.
7. Statistisches Jahrbuch des Hamburgischen Staates. 1920 Hamburg. 1924.
8. Statistisches Handbuch für Württemberg. 1913-1921 ; Stuttgart 1923.
9. Die Bewegung der Bevölkerung in den Jahren 1914 bis 1921. Bearbeitet und herausgegeben vom Bundesamt für Statistik. Wien 1923.
10. Statistisches Handbuch der Republik Österreich 1920 bis 1925. Wien.
11. Statistisches Handbuch der Tschechoslowakischen Republik. II. 1925.
12. Österreichische Statistik. Neue Folge, Band XIV, Heft 1.
13. Statistisches Jahrbuch. Wien 1914.
14. Statistische Monatsschrift 1913-1917, Wien.
15. Beiträge zur Statistik der Stadt Wien. I. und II. Jahrgang. 1923 bis 1924.
16. Die Bewegung der Bevölkerung in Oesterreich 1895 bis 1912. In den Veröffentlichungen der k. k. Statistischen Zentralkommission. Wien.
17. Ungarisches Statistisches Jahrbuch. Neue Folge. XXIV, XXV und XXVI. 1916, 1917 und 1918. Budapest 1925.
18. Statistische Jahrbücher der Haupt-und Residenzstadt Budapest. 1913-1920 und 1921-1924. Budapest 1924 und 1925.
19. Magyar Statisztikai Szemle. 1921-1925. Budapest.
20. Buletinul Statistic al Romaniei 1915 bis 1925. Bucarest. (rumänisch) ; Annuaire Statistique. 1922-24. Bucarest.
21. Rocznik Polski. 1924. Warschau 1925. (polnisch)
22. Jahrbücher der Stadt Warschau. (polnisch) für 1917 bis 1924. Warschau 1920, 1924 und 1925.
23. Annuaire Statistique de la ville de Lodz. (polnisch) 1922 bis 1924.
24. Bulletin Mensuel de Statistique Municipale. (polnisch). Warschau 1922 bis 1926.
25. Wiadomosci Statystyczne. 1923 bis 1926. Warschau. Ausgabe des Statistischen Amtes der Republik.
26. Léopol en chiffres. (polnisch) 1924 bis 1926. Lemberg.
27. Statistisches Jahrbuch des Bulgarischen Königreiches. (Bulgarisch) für 1913 bis 1922 und für 1923 bis 1924. Sofia 1924 und 1925.

28. Mitteilungen des Statistischen Büros der Stadt Odessa. 1920 bis 1923. (russisch)
29. Bulletin des Statistischen Gouvernementsbüros in Leningrad (russisch). 1923 bis 1926.
30. Die Kindersterblickeit im Europäischen Russland im Jahre 1909 bis 1911. Amtliche Ausgabe. Petersburg. 1913.
31. « Causal factors in infant Mortality ». U. S. Departement of Labor. Children's Bureau. Publication N 142. Washington. 9 25.
32. Die Bevölkerungsbewegung in Ungarn (Népmozgalma) (Ungarisch) 1913 bis 1913, Budapest 1924.
33. Die fünfzigjährige Entwicklung der Haupt- und Residenzstadt Budapest. 1873 bis 1923. (ungarisch und deutsch) Budapest 1925.
34. Jahrbücher der Republik Lettland. (lettisch), 1920 bis 1923. Riga.
35. Jahrbuch der Stadt Riga. 1924. (lettisch)
36. Statisticos Biuletenis. Kowno. (litauisch). 1923 bis 1926.
37. Zeitschrift für Demographie und Statistik der Juden. Berlin 1905 bis 1925.
38. Blätter für Demographie, Statistik und Wirtschaftskunde der Juden. 1923 bis 1925. Berlin.
39. Archiv für Rassen und Gesellschaftsbiologie. 1907 bis 1923.
40. *Der Rassenselbstmord in den Vereinigten Staaten* Sozialistische Monatshefte 1911, Band VII.
41. Veröffentlichungen des Warschauer Statistischen Komitees (russisch). Band XXXIII und XXXIV.
42. Mitteilungen der Exekutive der jüdischen Welthilfskonferenz. Nr. 5 (jüdisch) Paris 1922.
43. Materialien der Gesellschaft für Gesundheitsschutz der Juden (OSE). Berlin 1921 bis 1926.
44. Hygiene der Juden. Dresden 1911.
45. Statistik der Juden. Sammelschrift. Berlin 1918.
46. Die Juden in Oesterreich. Veröffentlichung des Büros für Statistik der Juden. Heft IV. Berlin 1908.
47. Dr. Raphael Becker, *Die jüdische Nervosität.* Zürich 1918.
48. E. v. Bergmann, *Zur Geschichte der Entwicklung deutscher, polnischer und jüdischer Bevölkerung in der Provinz Posen.* Thübingen 1883.
49. Dr. Bernheimer, *The Jewish Population of Cities in the United States.* The Jewish Social Service Quarterly, Dezember 1925. Philadelphia.
50. Dr. B. Bienstock, *Die Juden in Petrograd.* im « Jüdischen Almanach » (russisch). Petrograd. 1923.
51. Dr. B. Bienstock und Dr. S. Nowossielski, *Die natürliche Bewegung der jüdischen Bevölkerung des Europäischen Russlands.* (russisch). Petrograd 1915.
52. Dr. Benedikt Bornstein, *Ruch naturalny ludnosci. b. Kongressowki 1909-1918.* (polnisch). Warschau 1921.

53. B. Borochow, *Die wirtschaftliche Entwicklung des jüdischen Volkes.* (jüdisch) Odessa 1920.
54. B. Brutzkus, *Die Statistik der jüdischen Bevölkerung in Russland* russisch) Petersburg 1909.
55. B. Brutzkus, *Die berufliche Gliederung der jüdischen Bevölkerung in Russland.* (russisch) Petersburg 1908.
56. J. Coralnik, *Die Juden in der Ukraine.* Blätter für Demographie, Statistik und Wirtschaftskunde der Juden. Nr. 3, 4 Berlin. 1924.
57. Dr. H. Eisenstadt, *Soziale Hygiene der Juden.* Im Handwörterbuch der Sozialen Hygiene von Dr. A. Grotjahn und Prof. J. Kaup. Leipzig 1912.
58. Dr. Maurice Fishberg, *Die Rassenmerkmale der Juden.* München 1913.
59. H. Frank, *Die natürliche Bewegung der jüdischen Bevölkerung in Bialostok 1909 bis 1918.* Bialostok 1920. (jüdisch).
60. Prof. Corrado Gini, *Alcune ricerche demografiche sugli Israeliti in Padova.* Padova 1916.
61. Dr. M. J. Gutmann, *Ueber den heutigen Stand der Rassen- und Krankheitsfrage der Juden.* München 1920.
62. Jakob Lestschinski, *Das jüdische Volk in Zahlen.* Berlin 1921. (jüdisch)
63. R. E. May, *Konfessionelle Militärstatistik.* Thübingen 1923.
64. Dr. Saül Mézan, *Les juifs Espagnols en Bulgarie.* Sofia 1925.
65. Anna Rochester, *Infant Mortality. Results of a field Study in Baltimore, Md., based on births in one year.* U. S. Dep. of Labor, Children's Bureau. Publication N. 119. Washington 1923.
66. Dr. Siegfried Rosenfeld, *Die Sterblichkeit der Juden in Wien und die Ursachen der jüdischen Mindersterblichkeit.* Archiv für Rassen-und Gesellschaftsbiologie. 1907 I. Heft.
67. B. Rubstein, *Das Aussterben der russischen Juden* « Zukunft » (jüdisch) New-York 1922.
68. Dr. A. Ruppin, *Die Juden der Gegenwart.* Berlin 1920.
69. Dr. Z. Schabad, *Die Sterblichkeit und Geburten bei den Juden in Wilna 1911 bis 1920.* (jüdisch) Wilna 1922.
70. Dr. Schatz, — Anin — *Die Juden in Lettland.* (jüdisch) Riga 1924.
71. Dr. Jakob Segall, *Die beruflichen und sozialen Verhältnisse der Juden in Deutschland.* Berlin 1912.
72. Dr. Felix A. Theilhaber, *Soziales Aufsteigen in rassenhygienischer Beziehung.* Archiv für Rassen-und Gesellschaftsbiologie I. bis II. Heft. 1913.
73. Dr. Felix A. Theilhaber, *Der Untergang der deutschen Juden.* Berlin 1921.
74. H. Van Zanten, *Quelques données demographique sur les israelites à Amsterdam.* Metron I. VI. 1925. Vol. V. N. I.
75. Dott. J. Zoller, *La Comunità israelitica di Trieste.* Metron. 1924.
76. Dr. Ignatz Zollschan, *Das Rassenproblem.* Wien 1920.

JACOPO TIVARONI.

Contribuzioni e reddito dei privati in Italia dalla proclamazione del Regno (1861) ai nostri giorni.

INDICE.

INTRODUZIONE.

Scopo del presente lavoro. — Quali siano le entrate degli enti pubblici obbligatori che devono essere poste in relazione col reddito dei privati. — Che cosa sia da intendere per reddito dei privati e per reddito Nazionale.

CAPITOLO I.

Ammontare complessivo delle contribuzioni del Regno d'Italia, delle Provincie Venete e dello Stato Pontificio verso il 1860.

1. Ragione per cui questa indagine può cominciare soltanto dal periodo dell'unificazione (1861). — 2. Ammontare delle contribuzioni governative, comunali e provinciali del *Regno d'Italia* nel suddetto periodo. — 3. *Idem* per le provincie Venete e di Mantova. — Osservazioni sulle finanze delle provincie Venete sotto il dominio austriaco. — Le imposte nelle provincie di Trieste e del « Tirolo ». — 4. *Idem* per lo Stato Pontificio. — 5. Quadro complessivo delle contribuzioni del Regno d'Italia, delle Provincie Venete e dello Stato Pontificio per l'anno 1863. — Ripartizione del complessivo carico tributario fra imposte dirette, imposte sui trasferimenti e imposte sui consumi.

CAPITOLO II.

Ammontare del reddito nazionale verso il 1860.

1. Valutazione del reddito dei privati verso il 1860. — La valutazione del Santoro. — 2. Ammontare del patrimonio dei privati calcolato col metodo dello « intervallo devolutivo ». — Osservazioni su questo metodo. — Rapporto quantitativo fra patrimonio e reddito. — 3. Il reddito dei privati calcolato per proporzionalità col valore del reddito dell'agricoltura. — Il reddito dei privati calcolato per proporzionalità con un successivo valore del patrimonio.

Capitolo III.

Condizioni economiche dell'Italia verso il 1860.

1. Le condizioni economiche dell'Italia e la nostra stima del reddito nazionale verso il 1860. — Popolazione, estensione delle varie colture e produzione delle principali derrate agrarie. Consistenza del bestiame. — 2. Discrete condizioni dell'industria. — 3. Le condizioni del commercio.

Capitolo IV.

Incremento delle contribuzioni dal 1861 ai nostri giorni.

1. Ripartizione in periodi della finanza italiana dal 1861 ai nostri giorni. — Periodo costruttivo dal 1861 al 1876. — 2. Periodo delle illusioni dal 1876 al 1887. — 3. Periodo di decadenza dal 1888 al 1892. — 4. Periodo di ricostituzione dal 1893 al 1898. — 5. Periodo precedente la guerra dal 1898 al 1914. — 6. Periodo della guerra e dell'immediato dopo guerra (1915-1924-25).

Capitolo V.

Incremento del patrimonio e del reddito dal 1861 al 1876.

1. Grande incremento dei valori delle successioni e delle donazioni dal 1864-67 al 1876. — 2. Progresso dell'agricoltura e dell'industria. — Aumento dei salari reali degli operai delle industrie. — 3. Rendita catastale dei terreni, reddito imponibile dei fabbricati, somme riscosse dai titolari del debito pubblico, reddito imponibile agli effetti dell'imposta di R. M. — 4. Rapporto fra contribuzioni e reddito dei privati nel 1876.

Capitolo VI.

Incremento del patrimonio e del reddito dal 1876 al 1887.

1. Incremento dei valori delle successioni e delle donazioni dal 1876 al 1887. — 2. Lieve diminuzione della produzione agricola. — 3. Piccole variazioni nel reddito imponibile dei fabbricati. — Variazioni nella importazione del carbon fossile e del cotone greggio; somme riscosse dai titolari del debito pubblico. — 4. L'emigrazione comincia ad acquistare importanza economica. — 5. Rapporto fra contribuzioni e reddito dei privati nel 1887.

Capitolo VII.

Variazioni del patrimonio e del reddito dal 1888 al 1892.

1. Stabilità dei valori delle successioni e delle donazioni nel periodo considerato. — 2. Stazionarietà della produzione agricola e dei prezzi delle derrate. — 3. Aumento del reddito imponibile dei fabbricati. — 4. Cenni sulle condizioni dell'industria, del commercio e dell'emigrazione. — 5. Rapporto fra contribuzioni e reddito dei privati nel 1892.

Capitolo VIII.

Variazioni del patrimonio e del reddito dal 1893 al 1898.

1. Diminuzione dei valori delle successioni e delle donazioni. — 2. Stazionarietà della produzione agricola e dei prezzi delle derrate. — 3. Importazione

del carbon fossile e produzione della energia elettrica; importazione del cotone. — Tonnellaggio delle navi a vela ed a vapore. — Valore delle merci importate ed esportate. — Reddito imponibile accertato nelle categ. B, C, e D delli'mposta di R. M. — Stipendi degli impiegati dello Stato. — Interessi del debito pubblico. — 4. Condizioni dell'emigrazione. — 5. Rapporto fra contribuzioni e reddito dei privati nel 1898.

Capitolo IX.

Incremento del patrimonio e del reddito dei privati dal 1898 al 1914.

1. Aumento dei valori delle successioni e delle donazioni. — Stima del patrimonio dei privati ottenuta col metodo dell'inventario reale. — Stima del redditto dei privati nel 1913-14. — 2. Aumento della produzione delle derrate agricole e dei loro prezzi. — 3. Sviluppo dell'industria. — 4 Rimesse degli emigranti. — 5. Consumo medio annuo di alcuni importanti prodotti. — 6. Rapporto fra le contribuzioni ed il reddito dei privati nel 1913-14.

Capitolo X.

Stazionarietà del patrimonio e del reddito dei privati fra i due estremi del periodo 1914-1924-25.

1. Stima del patrimonio dei privati nel 1924-25. — 2. Stima del reddito dei privati nello stesso esercizio. — 3. Aumento della produzione agricola e diminuzione dei prezzi delle principali derrate. — 4. Variazioni del reddito dei fabbricati urbani. — 5. Condizioni dell'industria e del commercio; stipendi degli impiegati governativi; interessi del debito pubblico; consumo medio individuale di alcuni importanti prodotti. — 6. Calcolo del reddito per proporzionalità con la spesa pel consumo, e stima dei beni prodotti e dei servigi resi nel 1924-25. — Stazionarietà del reddito dei privati fra i due estremi del periodo 1914-1924-25. — Rapporto fra le contribuzioni ed il reddito dei privati nel 1924-25. — 7. Influenza delle variazioni dei prezzi sulla condizione dei contribuenti.

Capitolo XI.

Osservazioni finali e conclusione.

1. Tavola numerica indicante l'ammontare delle contribuzioni, del patrimonio e del reddito dei privati, della percentuale delle contribuzioni in relazione al reddito dei privati, del reddito e delle imposte per abitante in ciascuno degli anni 1863, 1876, 1887, 1892, 1898, 1914 e 1924 — 2 Numeri indici pel 1924-25 della popolazione, del reddito totale, del reddito individuale e delle contribuzioni fatto eguale a 100 il valore degli stessi elementi nel 1863-67. — Il rapporto delle contribuzioni al reddito dei privati dal 1863 al 1924-25 è aumentata dal 12 a quasi il 23 per cento. — 3. Osservazioni conclusive.

Appendice.

Fonti.

INTRODUZIONE.

Il presente studio è soltanto un capitolo di un maggior lavoro, rivolto ad accertare se il rapporto fra le contribuzioni ed il reddito dei privati in alcune importanti Nazioni sia nel decorso del tempo aumentato, come è opinione prevalente e quasi generale, o invece diminuito oppure rimasto stazionario, come ritengono alcuni pochi competenti, come il Prof. FLORA (1) ed il Prof. NITTI (2).

Questa ricerca, che mi propongo di condurre con la tecnica rigorosa caratteristica delle attuali ricerche statistiche, ha quindi lo scopo di indagare se esista una legge (nel senso che si dà a questa parola nella metodologia statistica) che regoli le variazioni o meglio l'incremento del complessivo ammontare delle contribuzioni in relazione alle variazioni, o meglio all'incremento del complessivo ammontare del reddito dei privati, e di altre circostanze, quali le alternative della pace e della guerra e le mutazioni delle forme di governo, per cui sia lecito fare delle previsioni anche per il futuro, a condizione bene inteso, che continuino ad agire sia sulle contribuzioni sia sul reddito dei privati quelle stesse circostanze, che hanno agito in passato ed agiscono anche adesso.

E poichè — nella successione dei singoli esercizi finanziari — è la entrata dello Stato quella che regola la spesa, non essendo

---

(1) Il Prof. FLORA ritiene che «per quanto enormi, i bilanci passivi degli Stati moderni recano un minor peso ai contribuenti di quelli dei tempi passati, causa l'aumento, variabile, ma generale, della ricchezza, privata. Lo Stato moderno ha attribuzioni infinitamente maggiori dello Stato antico, senza per questo prelevare, mercè l'aumento della popolazione e della ricchezza, dalle economie individuali, una quota superiore a quella di 50 anni or sono, anzi in molti paesi questa quota appare ancora inferiore Così avviene, ad esempio, nel Regno Unito, dove lo Stato spende annualmente circa un sesto del reddito nazionale, mentre in principio del secolo scorso ne spendeva quasi un terzo. Di guisa che, ad una massa maggiore di servizi resi dallo Stato alla società, corrisponderebbe per questa in molti paesi un costo proporzionalmente minore» (*Manuale di scienza delle finanze*. Pag. 68, VI Ediz. Livorno 1921).

(2) Il Prof. NITTI, dopo aver rilevato la tendenza dei bilanci all'accrescimento, scrive che è però sua convinzione che «se si tenessero presenti tutti i lati del problema, si vedrebbe che l'attività dei cittadini che lo Stato richiedeva sotto forma di prestazioni personali, oltrechè sotto forme di contributi monetari, era maggiore in passato che adesso. Ora i cittadini danno allo Stato meno che non abbiano dato in qualsiasi epoca di civiltà relativa» (Cfr. *Il Bilancio dello Stato*. Napoli, 1900, pag. 36 in nota).

possibile intendere una potenza finanziaria dello Stato indipendente da quella economica della Nazione, così, risolvere il quesito sopraindicato è risolvere nello stesso tempo quello relativo al rapporto tra spesa dello Stato e reddito dei privati, e porre il problema dell'aumento della spesa degli enti pubblici nei suoi veri limiti, certamente meno ampi di quelli che appariscono a chi lo consideri soltanto sotto l'aspetto *assoluto*, senza tenere conto della relazione della spesa dello Stato con le sue entrate e con quelle sopratutto dei cittadini.

D'altra parte, la altezza assoluta e relativa dell'imposta si identifica con quella della erogazione dell'imposta stessa, perchè soltanto le alte imposte permettono allo Stato di soddisfare oltre i bisogni immanenti della difesa e della giustizia, anche quelli contingenti dell'incremento della civiltà e del benessere della Nazione.

Ma non solo interessa conoscere il rapporto tra il complesso delle contribuzioni da una parte e l'ammontare totale dei redditi dei privati dall'altra parte, nella sua consistenza quantitativa e nelle sue variazioni nel tempo; importa anche ricercare la ripartizione quantitativa del totale delle contribuzioni nei principali elementi che lo compongono, per accertarne il reciproco comportamento nella successione del tempo e nella varietà degli ordinamenti politici. È vero che l'elemento essenziale per la valutazione del carattere e degli scopi della Finanza di ogni Stato e di ogni epoca è rappresentato dalla quantità e dalla qualità della spesa pubblica, non è tuttavia indifferente per coloro che ne sopportano il costo, e per tutta intera l'economia Nazionale, che essa trovi la propria copertura nel deciso prevalere delle imposte dirette sui redditi o sul patrimonio, in quelle sui trasferimenti o in quelle sul consumo, o in un equo temperamento di queste principali categorie della pubblica entrata.

Ma quali sono le entrate degli enti pubblici che dobbiamo considerare?

Evidentemente soltanto quelle *effettive*, ossia quelle che importano aumento della sostanza patrimoniale dello Stato (1). Perchè le entrate derivanti da *movimento di capitali* (accensione di debiti, riscossione di crediti, alienazione di patrimonio dello Stato) non costituiscono di per sè stesse una sottrazione operata sul reddito dei cittadini, ma rappresentano la necessità di ricorrere in un periodo immediatamente successivo ad un aumento delle entrate effettive, *del quale*

---

(1) V. artic. 137 del Regolam. 4 maggio 1885, n. 3074.

si tien conto, sia per soddisfare gli interessi dei debiti incontrati, sia per sostituire quella entrata che viene a mancare per la riscossione di un credito o per l'alienazione di quell'elemento del patrimonio dello Stato che la produceva.

Per lo stesso motivo, che non rappresentano una sottrazione operata sul reddito dei cittadini, dalle entrate effettive devono essere sottratti i redditi patrimoniali dello Stato, i proventi dei servizi pubblici (ferrovie, poste, telegrafi, ecc.), perchè se i servizi ai quali corrispondono queste tasse non fossero prestati dallo Stato, sarebbero evidentemente prestati da società private, che li farebbero pagare egualmente, e probabilmente anche di più, e nemmeno le entrate consistenti in rimborsi e concorsi nelle spese dello Stato da parte delle provincie e dei comuni, in proventi o ricuperi di portafogli, nei residui della gestione approvvigionamenti e consumi alimentari esercitata dallo Stato durante la guerra e nell'immediato dopoguerra, da alienazioni dei materiali residuati dalla guerra, dalle riparazioni ottenute dalla Germania, e da qualsiasi altra entrata che non sia pagata dai contribuenti, come costo dei servizi di ordine generale prestati dallo Stato, dai Comuni, e dalle Province.

Per analogo motivo dal provento lordo dei monopoli fiscali (tabachi, sale, gioco del lotto etc.) deve essere correttamente dedotta quella parte che non rappresenta il beneficio netto del monopolista, ossia le spese di produzione, aumentate di un ragionevole saggio del profitto, (che si è calcolato nella misura del 10 $^{0}/_{0}$ delle spese stesse), perchè se il monopolio fiscale non esistesse, non per questo i cittadini potrebbero ottenere gratuitamente i tabacchi, il sale e gli altri beni che formano oggetto di monopolio, ma li dovrebbero sempre acquistare presso società di produttori o produttori singoli, pagandoli al prezzo che queste imprese fisserebbero, e che può essere calcolato nella misura sopraindicata.

***

Come abbiamo precisato quali sono le entrate dello Stato che devono essere poste in relazione col reddito dei privati, dobbiamo ora esporre il nostro concetto di reddito individuale e nazionale.

Per reddito di una persona o di una collettività — secondo la concezione più comune, preferibile e generalmente accolta nella legislazione finanziaria — noi intendiamo quel complesso di beni economici che tale persona o collettività ottiene — nella unità di tempo — dal proprio lavoro e dal proprio patrimonio (compresi i

servizi derivanti dal patrimonio), e che può consumare senza diminuire i beni pre-esistenti (1).

Il reddito dei privati o reddito privato di una Nazione è quindi la somma dei redditi ottenuti, nell'unità di tempo, dai suoi cittadini e di quella parte del reddito degli enti collettivi di diritto privato (quali le società commerciali, le società sportive e di divertimento, i consorzi di bonifica e di irrigazione ecc.), che non entra a costituire un elemento del reddito delle persone fisiche che ne fanno parte.

A sua volta il reddito complessivo di una Nazione o reddito nazionale è la somma dei redditi ottenuti, nell'unità di tempo, dai suoi cittadini, della parte surriferita del reddito degli enti collettivi di diritto privato, e di quella parte del reddito degli enti collettivi di diritto pubblico, che non costituisce un elemento originario o indipendente del reddito delle persone fisiche.

In conformità ai concetti sopraindicati i redditi di tutti gli enti collettivi di diritto privato — con esclusione della parte di reddito destinato a riserva o ad incremento del patrimonio immobiliare o mobiliare degli enti stessi — non devono essere valutati a parte, in quanto essi sono già computati come elementi del reddito dei privati.

L'eccezione è rappresentata da quella parte dei loro redditi che le associazioni religiose, sportive, di istruzione, di divertimento ecc. ottengono in corrispettivo dei servigi prestati o dei godimenti procurati, mediante contributi dei soci, perchè questa parte del reddito non va a finire nelle aziende dei singoli soci, ma viene anzi trasferita dai soci alle associazioni, e deve essere computata sia in conto dei soci, sia in conto delle società.

Per i redditi degli enti collettivi di diritto pubblico (Stato, Provincie, Comuni e loro consorzi, altri enti di diritto amministrativo quali enti ecclesiastici, fondazioni di beneficenza, ospedali, case di ricovero, congregazioni di carità ecc.) è necessario distinguere la parte di questi redditi che è goduta dalle persone (ammalati, cronici, ricoverati, etc.) che non rendono alcun servizio a favore dei suddetti enti collettivi, e la parte che viene trasferita a coloro che prestano la loro opera o cedono l'uso del proprio capitale a favore dei sur-

---

(1) WAGNER A., *Les fondements de l'économie politique* (traduz. francese). Parigi. Giard et Brière. 1904-1909. Vol. II. Pagg. 99-107. GINI, *L'ammontare e la composizione della ricchezza delle Nazioni*, pag. 8. Torino. Bocca. 1914.

riferiti enti. La prima parte del reddito deve essere valutata soltanto in conto dell'ente collettivo, perchè nessun servizio è reso in cambio di questa parte del reddito; la seconda parte del reddito deve essere valutata due volte, e cioè una volta in conto dell'ente collettivo che ottiene il reddito e una seconda volta in conto dei privati ai quali l'ente trasferisce il reddito stesso, perchè le loro prestazioni *sono parti indipendenti del reddito netto di un paese.*

Sempre in conformità al surriferito concetto di reddito nazionale, gli interessi dei titoli del debito pubblico e gli stipendi degli impiegati dello Stato, delle Provincie e dei Comuni devono essere compresi nel reddito nazionale, dopo che sia già stato valutato il reddito dei cittadini al lordo delle imposte. Ed invero gli interessi riscossi dai titolari del debito pubblico e gli stipendi dei suddetti impiegati sono il compenso che essi ricevono per l'utilità che hanno recato, e rispettivamente recano, allo Stato mediante il mutuo dei loro capitali e la prestazione del loro lavoro, mentre i servigi del capitale mutuato allo Stato e le prestazioni degli impiegati sono elementi indipendenti del reddito di un paese. Escludere i redditi dei titoli del debito pubblico e degli impiegati dal computo del reddito nazionale sarebbe commettere lo stesso errore, — contro il quale mette in guardia Marshal, — in cui cadrebbe chi considerasse una sola volta il reddito di un proprietario fondiario, che ne cede una parte al suo segretario, che ne cede una parte al suo domestico. « Supponete che un proprietario di terreni con un reddito annuo di 10.000 Lst. prenda a servizio un segretario privato con uno stipendio di 500 Lst. il quale prenda a servizio un domestico con un salario di 50 Lst. Può sembrare che se i redditi di tutte e tre queste persone sono valutati come parte del reddito netto del paese, uno di questi redditi sia considerato due volte, ed uno persino tre volte. Ma non è così. Il proprietario di terreni trasferisce al suo segretario, in cambio della sua collaborazione, parte della potenza di acquisto derivata dal prodotto del terreno, e il segretario alla sua volta trasferisce parte di quella potenza al suo domestico in cambio della sua assistenza.

Il podere produce il valore che va come rendita al suo proprietario; l'assistenza che il proprietario ottiene dal lavoro del segretario, e quella che il segretario ottiene dal lavoro del domestico *sono parti indipendenti del reddito netto del paese,* e quindi le 10.000, le 550 e le 50 Lst. che ne sono le misure monetarie, devono essere tutte considerate quando noi stimiamo il reddito di un paese.

Ma se il proprietario dei terreni concede un assegno di 500 L. all'anno a suo figlio, questo non può essere considerato come un

reddito indipendente, perchè nessun servizio è reso in cambio di esso (1) ».

Un concetto profondamente diverso da quello prevalente e, a nostro avviso, preferibile del reddito è quello sviluppato dal prof. I. FISHER (2). Infatti per il FISHER il reddito di un individuo è « il flusso totale dei servizi che egli ottiene dalla sua proprietà » e il reddito di una collettività è « il flusso totale dei servizi derivanti da tutti i suoi strumenti di ricchezza ». Non è il caso di esporre quì i motivi del nostro dissenso da questo concetto di reddito, che d'altra parte non manca certamente di eleganza e di coerenza.

CAPITOLO I.

1. — Cominciamo il nostro lavoro con lo studio delle variazioni delle contribuzioni e del reddito dei privati nel nostro paese, riservandoci di estenderlo in seguito ad altri importanti Stati, per i quali potremo procurarci tutti gli elementi indispensabili per una seria ricerca.

Avremmo desiderato di iniziare le nostre ricerche con la descrizione delle condizioni economiche e finanziarie dell'Italia all'aprirsi

---

(1) MARSHALL A., *Principles of Economics*. Sixth edit. Londra. Macmillan and Co. 1910, pag. 79.

(2) FISHER I., *La natura del capitale e del reddito*. In « Biblioteca dell'Economista ». Serie V. Vol IV. Una copiosa ed utile raccolta delle definizioni tipiche del reddito si trova nell'Appendice al Capit. VII. Vi aggiungiamo soltanto i più recenti scrittori italiani che si sono occupati dell'argomento: ALESSIO G., *Contributo al concetto economico-nazionale del patrimonio e del reddito*. In « Atti del R. Istituto veneto di scienze, lettere ad arti » Anno accademico 1910-11 Tomo LXX, parte II Venezia 1911. ALESSIO G., *Nuove ricerche sul concetto di patrimonio e di reddito*, In « Atti della R. Accademia dei Lincei. Serie V. Vol. XVII. Fasc. II (pagg. 31, 114). Roma 1923. BATTISTELLA C., *Il concetto di reddito in economia, in finanza e nel diritto finanziario*. Rovigo. Tipogr. Sociale. 1913. GARELLI A., *Il concetto di reddito nella scienza finanziaria* in « Filangieri » luglio 1917. GINI C., *L'ammontare e la composizione della ricchezza delle Nazioni*, pag. 8 e segg. Torino, Bocca 1914. LORIA A., *La sintesi economica*. Studio sulle leggi del reddito. Torino. Bocca 1909. TIVARONI J., *Di alcune questioni insolute relative alla fonte ed alla ripartizione dell'imposta*. In « Rivista dei Ragionieri » Padova. 1914. DE FRANCISCI GERBINO G., *Sul concetto di reddito in relazione al consumo*. In « Giorn. d. Economisti » febbraio 1919. EINAUDI L., *Intorno al concetto di reddito imponibile e di un sistema di imposte sul reddito consumato*. Torino. 1912. RICCI U., *Che cosa è il reddito*. In « Giornale degli Economisti » agosto 1914. SUPINO C. *Economia politica*. VI Ed. Milano Albrighi Segati e C. 1923. MASCI G., *Il concetto e la definizione del reddito*. Napoli. Pierro, 1913.

del secolo XIX, ma abbiamo dovuto rinunciare a questo proposito non già perchè sia impossibile procurarsi i bilanci dei varî Stati, in cui era allora diviso il nostro paese, ma per la difficoltà, ed anzi per la impossibilità di valutare con qualche esattezza il reddito dei privati in quel periodo, data la deficienza di statistiche ufficiali e di studî in proposito di autori contemporanei o successivi.

Dobbiamo perciò limitarci a cominciare il nostro lavoro con la descrizione dello stato dell'economia nazionale e delle finanze degli Enti pubblici nel periodo della unificazione (1861), periodo d'altra parte estremamente interessante, anche perchè molto agitato in ogni ordine di fatti e di idee, perchè con esso ha inizio la nuova storia d'Italia, certamente destinata a raggiungere, nella unione e nella concordia degli animi, le più alte cime del progresso morale, intellettuale e materiale.

Se per questo periodo le statistiche ufficiali e le ricerche di privati studiosi contengono dati sufficienti per tracciare un quadro generale delle sue condizioni economiche e finanziarie, mancano invece indagini particolarmente rivolte ad accertare la misura del reddito dei privati, ma noi tenteremo di completare questa lacuna valendoci di tutti gli elementi che potemmo trarre dallo studio delle pubblicazioni ufficiali e private relative a quell'epoca fortunosa.

2. – Nell'anno 1863 (1) le *contribuzioni* governative, nel preciso senso che si è in precedenza dato a questa parola, ammontavano pel Regno d'Italia a 434.4 milioni di lire (2), di cui 135.6 ossia il 31 % erano dati dalle imposte dirette (sui terreni, sui fabbricati e sulla ricchezza mobile), 67.6 milioni, ossia il 15% dalle tasse sugli affari, e 180 milioni di lire, ossia il 41% dalle imposte sui consumi (dazi doganali, imposte di fabbricazione, dazio-consumo di pertinenza dello Stato, beneficio netto dei monopoli governativi).

Nello stesso anno le entrate dei comuni del Regno erano di 123.5 milioni di lire, di cui 58.8 milioni, ossia il 47% provenivano dalle sovrimposte, e milioni 24.7, ossia il 20%, provenivano dal dazio consumo.

---

(1) Si ricorda che il Regno d'Italia è stato proclamato il 17 marzo 1861. Ma la statistica dei Bilanci comunali e provinciali, pubblicata nel 1868 (a Firenze) espone i Bilanci dei comuni e delle provincie del Regno soltanto a partire dal 1863 incluso. E quindi dobbiamo iniziare il nostro studio dall'anno 1863, e non dal 1862, per poter procedere alla somma di elementi omogenei anche nel tempo. In ogni modo le contribuzioni governative pel 1862 sono state di 360.2 milioni di lire.

(2) *Conto Generale dell'Amministrazione delle Finanze per gli esercizi 1862 a tutto il 1867*. Vol. 2°, parte II. a e Vol. 3° parte I. Firenze, Stamperia Reale, 1870.

Le entrate delle provincie ammontavano a 19.7 milioni di lire, di cui 15.3, ossia il 77 % erano dati dalle sovrimposte sui terreni e sui fabbricati.

3. — Nello stesso anno 1863, le contribuzioni governative ammontavano per le Provincie Venete e di Mantova (1) a lire ital. 56.6 milioni (2), di cui 20.5 milioni erano dati dalle imposte dirette, 9.2 milioni dalle imposte sugli affari, e 25.5 milioni dalle imposte sui consumi.

Nello stesso anno le entrate ordinarie dei Comuni erano di 39.1 milioni di lire (3), di cui 14.2 milioni erano dati dalle sovrimposte, e 1.5 milioni dal dazio consumo (4). Non sappiamo con precisione l'ammontare delle entrate delle provincie e del *Paese* (o meglio della (*Regione*) (5) per l'anno 1863, conosciamo invece quelle per il 1867 (6), che erano di 3966 milioni. Facendo ora l'ipotesi che le entrate delle provincie e della regione dal 1863 al 1867 fossero diminuite nella stessa proporzione in cui erano diminuite le entrate dei Comuni, (da 39.1 a 32 milioni di lire ital.) e cioè del 18%, esse nel 1863 sarebbero state di 4 6 milioni.

A proposito delle finanze del Lombardo-Veneto dapprima, e della sola Venezia con la provincia di Mantova dopo il 1859, è opportuno ricordare che parecchie imposte, e prima delle altre, la fondiaria, la più gravosa di tutte, erano prelevate in una misura più elevata che nelle altre parti dell'Impero, sebbene dopo il 1850 fossero state tolte molte diseguaglianze che prima rendevano ancora meno attendibile il criterio della perequazione delle imposte fra il Regno Lombardo-Veneto e le rimanenti provincie dell'Impero. Oltre la fondiaria anche il dazio consumo, le privative, il lotto e varie altre tasse erano più pesanti al di quà che al di là delle Alpi (7).

---

(1) La circoscrizione della provincia di Mantova sotto l'amministrazione austriaca non era precisamente la stessa che le fu assegnata dopo l'unificazione. Ma l'influenza di questa variazione non ha nessuna importanza per il totale delle entrate degli enti pubblici, perchè essa non fece altro che aggiungere alla provincia di Verona alcuni Comuni che prima appartenevano a quella di Mantova.

(2) *Statistisches Jahrbuch der Oesterreichischen Monarchie für 1864.*

(3) *Bilanci comunali (1866) e bilanci provinciali (1866, 67, 68)* Firenze 1868.

(4) Meneghini A., *Delle condizioni finanziarie delle Provincie italiane tuttora soggette all'Austria*. Torino 1864. Unione Tipografica Editrice. Pag. 201.

(5) Secondo la legislazione austriaca anche *i Paesi* (Länder), o più italianamente le *Regioni* avevano diritto di riscuotere entrate proprie.

(6) *Conto generale della Amministrazione delle Finanze* ecc., Op. cit.

(7) Meneghini A., *op. cit.* pag. 269.

Per quanto riguarda l'imposta prediale nel Regno L. V., essa nel 1859 (fra ordinaria e straordinaria) ammontava al 38.37% del reddito catastale, ed ammontava invece solo al 21.1/3% nelle provincie tedesche dell'Impero. Per conseguenza sui 51 milioni di lire pagati dal Regno a questo titolo, ve ne erano 22.6 all'infuori di ogni giustizia distributiva. E così pure l'imposta sui trasferimenti di proprietà, che in massima parte colpiva i trasferimenti dei terreni, essendo commisurata al valore dei terreni calcolato in un multiplo della imposta stessa, rendeva 4 o 5 milioni di più di quello che avrebbe reso se l'imposta fosse stata perequata (1).

Peggio ancora avevano proceduto le cose prima del 1859, perchè « prima di quell'anno il L.-V. fruttava annualmente all'Impero somme copiscue ed era da esso considerato come fonte inesauribile di ricchezza, perchè i soli *avanzi* rappresentavano più di metà delle sue entrate. L'Austria non spese mai nel L. V. più dei quattro decimi di quanto ricavava con gli ordinari balzelli, e si capisce quanto le premesse di conservarlo come paese di sfruttamento economico. Tutto rimaneva segreto, spese ordinarie e straordinarie venivano frammischiate con astuzia fra loro in modo che fra tanta confusione chi riusciva (e riesce tutt'oggi) a raccapezzarsi, poteva credere che il prestito fosse necessario per coprire spese straordinarie, mentre non sanava che il *deficit* ordinario annuale. I preventivi austriaci portavano sempre un *deficit* di molti milioni, i resoconti si chiudevano sempre col pareggio! (2) »

In ogni modo dal 1852 al 1864 l'Austria ricavava dalla Venezia le somme complessive di imposte qui sotto indicate (3) in milioni di fl. v. a. (4).

---

(1) Pasini V., *L'Autriche et le Royaume Lombardo-Vénetien au point de vue financier*. Florence. Barbera, le 3 avril 1859.

(2) Sandonà A., *Il Regno Lombardo-Veneto-1814-1859. La costituzione e l'amministrazione*. Pag. 320. Milano Cogliati. 1912.

(3) Ciasca R., *L'evoluzione economica della Lombardia dagli inizi del secolo XIX al 1860*, in « La Cassa di Risparmio delle Provincie Lombarde nella evoluzione economica della Regione », pagg 394-405 Milano, Arti grafiche 1923. Luzzato G., *L'evoluzione economica della Lombardia dal 1860 al 1922* pagg 449-460 *et passim*. Sta nella stessa pubblicazione della Cassa di Risparmio delle Provincie Lombarde.

(4) Meneghini, *op. cit.*, pag. 223 e seguenti.

(4) 1 fl. valuta austriaca = lire ital. 2.4691.

1852	21.7
1853	23 2
1854	23.8
1855	22.9
1856	22.9
1857	24.1
....	....
1863	29.8
1864	32.4

Negli anni 1863 e 1864 le spese per l'amministrazione civile erano state rispettivamente di 8.8 e di 9.8 milioni di fl.; quelle per gli interessi della quota del debito pubblico afferente alla Venezia di 3.3 e di 3.4 milioni di fl. Il MENEGHINI (1) non voleva poi calcolare la quota della Venezia per le spese dell'amministrazione centrale austriaca e specialmente per le spese per l'esercito, « perchè la Venezia nel 1848 col voto popolare aveva fatto atto di adesione agli Stati Sardi ». Da molti anni è venuta fortunatamente meno la nobile ragione del ritegno del MENEGHINI, e noi possiamo precisare che la quota della Venezia alle spese dell'amministrazione centrale austriaca, calcolata in proporzione al numero degli abitanti sarebbe stata di 1 milione e mezzo di fl. v. a., e quella per la guerra e marina sarebbe stata di 8.1 milioni di fl. (Secondo il censimento del 31 ottobre 1857 la popolazione della Venezia e della Provincia di Mantova era di 2.446.056 abitanti; quella di tutto l'Impero di 35.019.058 abitanti, mentre nel 1863 le spese ordinarie e straordinarie per l'esercito e la marina erano di 114.9 milioni di fl. v. a.

Nello stesso anno le spese complessive ordinarie e straordinarie di tutto l'Impero erano di 530.7 milioni di fl., e la quota di spese afferente alla Venezia poteva essere calcolata in 22.3 milioni di fiorini, la entrata in 30 milioni di fl. e l'avanzo a favore delle finanze austriache in 7-8 milioni di fl.

Ma la necessità per l'Austria di tenere un grosso esercito acquartierato nel Veneto per essere pronta a combattere una guerra contro l'Italia per tentare di conservare la Venezia, o per reprimere una rivoluzione, faceva sì — secondo l'opinione di VALENTINO PASINI e degli altri che vi avevano aderito — che l'incremento di spese militari che l'Austria a tale scopo sosteneva (2) superasse sensibilmente

---

(1) MENEGHINI A., *op. cit.*, pag. 252 e segg.

(2) A nostro modo di vedere, l'opinione di V. PASINI e degli altri che in essa convenivano, era in gran parte sofistica, perchè l'Austria doveva tenere un grosso

l'avanzo che le sue finanze ricavavano dalla Venezia. Sulla base di questa considerazione, già illustrata dal PASINI subito dopo la pace di Villafranca (1), e più tardi ripresa con indirizzo formale diverso, ma con identico fine, da altri eminenti esuli Veneti, cioè da NICOLÒ TOMMASEO, da LEONE PINCHERLE e dal Barone avv. FRANCESCO AVEZZANA — ma combattuta da una notevole parte dell'emigrazione veneta, siccome « sciocca ed indecorosa», il Ministro LAMARMORA, col consenso del Re, inviava a Vienna nel settembre 1865 il Conte ALESSANDRO MALAGUZZI-VALERI per informarsi se il Governo austriaco avrebbe ceduto la Venezia al Regno d'Italia dietro un cospicuo compenso in denaro da versarsi dall'Italia all'Austria. Ma la proposta, sebbene giudicata accettabile ed ottima dai Ministri ed anche dall'ambasciatore a Parigi principe METTERNICH, chiamato appositamente a Vienna per sentirne il parere, non incontrò l'approvazione dell'Imperatore e della Corte.

Un altro tentativo fu fatto al principio del 1866, col risultato che il MALAGUZZI ebbe ordine di sfratto dalla Polizia (2)!

4. — Per quanto riguarda lo *Stato Pontificio* (3) il primo bilancio pubblicato dopo il distacco delle Marche e dell'Umbria, è quello del 1864 (4). I suoi elementi non potendo essere sensibilmente differenti da quelli del 1863 riteniamo lecito di sommarli con i dati di questo anno, che abbiamo prima indicato per gli altri Stati d'Italia.

Le contribuzioni governative (sempre nel senso ristretto già in

---

esercito, per essere pronta a combattere non soltanto una guerra contro l'Italia, ma anche contro gli altri Stati (Prussia, Russia e Turchia) con i quali potevano sorgere motivi di conflitto. E infatti nel 1866, oltre che contro l'Italia, essa ebbe a combattere anche contro la Prussia.

(1) PASINI V. *L'Autriche et le Royaume L. V.* ecc., op. cit.

(2) TIVARONI CARLO., *Storia critica del Risorgimento Italiano*, vol. IX pag. 3, ZINI L., *Storia d'Italia*, vol. II pag. 1229 Milano 1869. BONGHI R., *La Vita e i tempi di V. Pasini*. Firenze. Barbera 1867. LUZIO A., *Francesco Giuseppe e l'Italia*, pag. 22-23 Milano. Treves 1917. SILVA P., *Il sessantasei*, p. 32-33. Milano. Treves. SOLITRO G., *V. Pasini e l'emigrazione veneta*. Padova. 1895. MALAGUZZI-VALERI G. L., *Trattative segrete italo-austriache prima della guerra del 1866*. « In Rivista d'Italia », anno VIII°, vol. II. 1905.

(3) Dopo l'annessione delle Marche e dell'Umbria (1860) la popolazione dello Stato Pontificio era rimasta di soli 692.112 abitanti, così ripartiti: Roma e Comarca 326.509; Civitavecchia 20.707; Frosinone 154.559; Velletri 62.013; Viterbo 128.324.

(4) *Almanach de Gotha pour l'année 1866* pagg. 799-800; *Idem* per il 1868 pag. 814; *idem* per il 1871 pag. 655. Cfr. anche la *Civiltà Cattolica* dell'anno 1865. pagg. 734 e 735.

precedenza indicato) erano di 22.1 milioni di lire italiane (1) di cui 5.2 milioni erano dati dalle imposte dirette, 1.5 milioni dalle tasse sugli affari e 15.1 milioni dalle imposte sui consumi (dazi doganali e monopolio governativo del giuoco del lotto, l'unico monopolio fiscale esistente nello Stato Pontificio) (2).

Per quanto ci consta il solo bilancio completo dello Stato Pontificio pubblicato dopo quello del 1864 è quello dell'anno 1867, il quale indicava le entrate seguenti: imposta fondiaria e emolumenti catastali 5.8 milioni di lire; dogane 19.6 milioni, carta-bollata 1.8 milioni, poste 650.000 lire, lotto 4.1 milioni; moneta e zecca 2.5 milioni, Ministero dell'Interno 195.000 lire, Ministero del Commercio e dei Lavori pubblici 350.000 lire, Ministero delle guerra 43.000 lire; debito pubblico 1 milione; totale 36.4 milioni.

Per l'anno 1868 si pubblicarono soltanto le entrate delle dogane per 14.3 milioni di lire, del lotto per 3.3 milioni di lire.

Ed infine il R. D. 15 gennaio 1871 n. 14 indicava in 38 milioni e mezzo di lire la somma delle entrate che la Provincia di Roma contribuiva al bilancio italiano, ripartite però secondo le varie specie di entrate proprie della legislazione tributaria del Regno d'Italia.

Per quanto riguarda le entrate ordinarie dei Comuni, poichè esse nel 1869 erano di 10.4 milioni di lire (3), crediamo di non andare

---

(1) Per l'anno 1859 il Coppi (*Annali d'Italia dal 1750 al 1861.* Tomo XV. pagg. 78,79. Firenze. Cellini e C. 1867) dava un'entrata di 14.447.000 scudi prima della perdita delle Legazioni, e di 12.170.000 scudi dopo questo distacco. Per il 1866 Cesare Cantù (*Cronistoria,* vol. II, pag. 717 in nota) indica la cifra di 34.8 milioni di lire. Per i bilanci dello Stato Pontificio dal 1815 al 1830 vedi anche: Broglio d'Ayano Romolo, *La politica doganale dello Stato Pontificio dal 1815 al 1860.* In « Giornale degli Economisti » II, Semestre 1911, pagg. 455 e 530. Per le finanze dal 1814 a tutto il 1853 molte notizie, riportate da documenti ufficiali, sono contenute nell'opera di Msg. Peraldi *Sullo stato attuale dei domini della Chiesa Romana.* Bastia, 1855. Tip. Fabiani da pag. 244 a pag. 476.

(2) « Il sistema tributario Pontificio era più semplice, che non fosse nel Reame di Napoli, che è tutto dire, e si mantenne così, salvo pochi ritocchi, sino all'ultimo. Nel 1852 il bilancio presentava questi estremi: un attivo di scudi 10.473.129 ed un passivo di scudi 12.336.487 (1 scudo = Lire italiane 5,32). Lo scudo d'argento, che era la base del sistema monetario, aveva il titolo di 900/1000; il peso di 26.898 grammi e corrispondeva a lire 5.32; e sei anni dopo, nel 1858, l'anno avanti la perdita delle Legazioni, il bilancio si era elevato a 14.552.570 scudi nel passivo. Il maggiore introito era rappresentato dalla dativa, che colpiva a preferenza i latifondisti, e dalle dogane. Si era fatto un gran passo, anche perchè in quegli anni non vi furono carestie, nè straordinari infortuni ». (R. De Cesare; *Roma e lo Stato del Papa dal ritorno di Pio IX al XX settembre.* Vol. I pag. 44. Roma Forzani. 1907).

(3) Maestri Pietro, *L'Italia economica nel 1870,* pag. 336. Firenze G. Ci-

lontani dal vero supponendole pel 1863 in circa 9 o 9 1/2 milioni di lire. Ci manca il dato relativo alle entrate della Provincia, ma nella ipotesi non inverosimile che esse stessero alle entrate dei Comuni dello Stato Romano nello stesso rapporto con cui dette entrate stavano fra di loro nell'anno medesimo nel Regno (e cioè 19.7 milioni di entrate ordinarie delle Provincie e 125.3 milioni di entrate ordinarie dei Comuni), otteniamo la cifra di 1 milione e mezzo di lire come importo delle entrate della Provincia di Roma per l'anno 1863 (1).

Con gli elementi raccolti possiamo così formare il seguente quadro delle *contribuzioni* del *Regno d'Italia*, delle Provincie Venete e di Mantova, e dello Stato Pontificio per l'anno 1863:

	Contribuzioni a favore dello Stato (milioni di lire)	Contribuzioni a favore dei Comuni (milioni di lire)	Contribuzioni a favore delle Provincie (milioni di lire)	Somma delle colonne 2+3+4
1	2	3	4	5
Regno d'Italia . . .	434.4	123.5	19.7	577.6
Prov. Venete . . .	56.6	39.1	4.6	100.3
Stato Pontif. . . .	22.1	9.5	1.5	33.1
Totale . .	513.1	172.1	25.8	711.0

	Imposte dirette governative (milioni di lire)	Per cento del totale	Tasse sugli affari (milioni di lire)	Per cento del totale	Imp. governat. sui consumi (milioni di lire)	Per cento del totale	Dazio consumo comunale (in milioni di lire) (*)	Per cento del totale	Sovrimposte provinciali (**)	Per cento del totale
Per tutta Italia	165,4	32	78,3	15	217,0	42	26,2	21	15,3	77

(*) Mancano i dati per i Comuni dello Stato Pontificio.
(**) Per il solo Regno d'Italia.

velli. 1871. Secondo l'*Annuario statistico italiano* pel 1878 (pag. 175) per i Comuni della Provincia di Roma non fu dato raccogliere notizie anteriori al 1870.

(2) Questa cifra ci sembra molto più verosimile di quella 11.7 milioni di lire per la sola Provincia di Roma, che si otterrebbe partendo dall'ipotesi, affacciata da Mons. Peraldi che « nello Stato Pontificio le gravezze provinciali e municipali, sommate, pareggiano, press'a poco le imposte governative » (M. F. Peraldi, *op. cit.*)

« Le tasse comunali erano in generale assai lievi; sulle acque (Vergine, Felice, Paola), sulle vie, sulle vigne e sugli orti suburbani, sulle cloache, sulla mattazione, sulla neve e sui cavalli di lusso. I bisogni morali e le condizioni economiche di allora si rispecchiano in quei bilanci » (De Cesare R., *Roma e lo Stato del Papa* ecc. pag. 329, *op. cit.*).

All'A. rincresce di non aver trovato l'importo per l'anno 1863 del dazio consumo e delle sovrimposte provinciali dei Comuni dello Stato Pontificio, e nè meno l'importo delle sovrimposte provinciali per le Provincie Venete, perchè non può così addizionare questo dato con quello del prodotto delle imposte sul consumo, allo scopo di ottenere la ripartizione del complessivo ammontare delle contribuzioni governative e comunali fra imposte dirette sui redditi, imposte sui trasferimenti e imposte sul consumo.

Ma quello che interessa maggiormente è il possesso della cifra di 711 milioni di lire, come ammontare totale delle contribuzioni del Regno d'Italia, delle Provincie Venete e di Mantova, e dello Stato Pontificio nel 1863 (1).

---

(1) Le entrate complessive dei bilanci *statali* del Regno d'Italia, delle Provincie Venete e dello Stato Pontificio erano invece, per lo stesso anno 1863, di 629.7 milioni di lire.

L'aumento in confronto degli anni precedenti era stato molto lento, come si può scorgere dal seguente quadro, che indica le entrate di ciascuno Stato d'Ita-

	Stati Sardi	Regno Lombardo-Veneto	Ducato di Parma	Ducato di Modena	Granducato di Toscana	Stato Pontificio	Regno di Napoli	Regno di Napoli e di Sicilia
1840	—	—	—	—	—	46.8	—	—
1847	95.3	110.8	7.6	7.2	23.6	42.6	118.7	147.4
1848	157.6	—	3.8 (*)	6.7	25.2	48.7	89.4	—
1849	164.0	—	8.7	7.9	26.6	53.6	98.5	—
1850	241.6	114.6	7.4	8.6	27.5	56.4	121 9	—
1851	182.2	116.0	8.6	9.3	29.6	64.0	124.4	—
1852	108.6	119.7	9.1	10.5	30.6	65.2	122.4	146.2
1853	155.5	127.0	9.1	11.2	31.2	71.1	116.3	—
1854	160.2	131.0	12.1	10.8	29.7	70.0	121.4	—
1855	156.7	128.4	9.7	10.7	31.4	67.3	127.4	—
1856	167.0	132.1	9.9	10.8	33.1	72.2	138.9	—
1857	161.7	134.6	9.8	11.0	31.9	75.8	130.8	—
1858	176.6	133.0	9.8	11.6	32.6	77.9	137.4	—
1859	—	—	—	—	—	77.9	—	—

(*) Le entrate presenti pel 1848 erano state di circa 7,3 milioni di lire, ma per gli avvenimenti politici di quell'anno, e specialmente per la separazione del Ducato di Piacenza, le entrate effettive furono soltanto di 3.819.000 lire.

Capitolo II.

Ammontare del reddito nazionale verso il 1860.

Per ottenere la misura della pressione tributaria è necessario riferire questo ammontare a quello del reddito dei privati nello stesso periodo.

---

lia prima della unificazione (Maestri P., *L'Italia economica nel 1878* pag. 321-2).

Si può con asseveranza dire, afferma il Maestri, che in vicinanza della guerra, l'Italia pagasse 620 milioni ai suoi Governi. Era d'uopo però, continua lo stesso Autore, «tracciare una linea divisoria fra le spese fatte dagli Stati Sardi, che preparavano la guerra nazionale, e quelle degli altri Stati Italiani, che erano dirette allo scopo contrario. Inoltre nel Regno di Sardegna vennero intraprese molte opere di pubblica utilità, le quali soglionsi riguardare come riproduttive e fu impressa al commercio quella energia che è il portato di un libero reggimento. Il resto della penisola era retto da Governi che intendevano le loro forze a comprimere e paralizzare lo spirito pubblico, al quale il principio di nazionalità aveva dato leva».

Le modeste economie di contenuto amministrativo realizzate dopo il 1859 con la riunione in uno di cinque Stati furono assorbite e superate dall'aumento delle spese reso necessario per rafforzare l'esercito e per sollevare, con ritmo molto più vibrato di quello precedente, l'istruzione, le ferrovie ed i lavori pubblici dallo stato di abbandono in cui erano stati lasciati dalla maggior parte dei Governi precedenti.

È opportuno ricordare anche che l'ammontare delle imposte governative nelle provincie di Trieste, Gorizia, Gradisca e Istria da una parte e del Tirolo e del Vorarlberg dall'altra, era quale risulta dalla seguente tabella (*Statistiches Jahrbuch der Oesterreichischen Monarchie für das Jahr 1864*, pag. 391 e segg.).

La Provincia austriaca del Tirolo e del Vorarlberg era formata dalla Vene-

	Trieste, Gorizia Gradisca e Istria (in migliaia di fiorini)	Tirolo e Vorarlberg (in migliaia di fiorini)
Imposte dirette	1760	1339
Imposte sui consumi	939	764
Dazi di confine	963	580
Bollo e diritti sui contratti e sulle compere	521	470
Sale (avanzo netto)	1160	835
Lotto (» »)	301	85
Tabacco (» »)	1719	1458
Poste (» »)	378	22
Diritti di pedaggio	71	83
Entrate dei beni e delle foreste demaniali	26	57
Entrate nette delle miniere demaniali .	—	239

Come accertarlo se, per quanto consta all'A., nessuno degli scrittori contemporanei si è particolarmente occupato di questo argomento? Mentre il Bonghi, il solo che vi avesse accennato, rinunciava « a congetturare quanta parte di rendita privata l'entrata dello Stato avrebbe portato via, e quanto questa parte fosse proporzionalmente maggiore che in Inghilterra ed in Francia, perchè gli venivano fuori conclusioni così enormi, che preferiva chiudere le labbra, come dice Dante che si deve fare, al ver che ha faccia di menzogna » (1) e null'altro aggiungeva su questo argomento.

Fra gli Autori successivi, sempre per quanto mi consta, soltanto il Santoro (2) ha tentato il calcolo del reddito e del patrimonio dei privati verso il 1860, non mancando di fare le necessarie riserve circa il grado della sua esattezza.

---

zia Tridentina al di qua del Brennero, divisa nei due distretti di Trento e di Bressanone, e dalle Provincie del Tirolo e del Vorarlberg, al di là del Brennero. Stavano al di qua delle Alpi 13.501 Kmq., al di là 15.193; e cioè il territorio al di qua delle Alpi rappresentava il 47 % del territorio totale della Provincia che era di 28.694 Kmq. Ma il dato della superficie troppo si allontanava da quelli della popolazione e della ricchezza. Ed invero della complessiva popolazione, che ammontava a 851.016 abitanti, 513 280 e cioè il 60 %, popolavano la terra che, scrive il Meneghini, volevamo rivendicare. Il catasto poi assegnava il 62.85 % del complessivo valor capitale colpito dall'imposta prediale alla Venezia Tridentina. I due rapporti desunti dalla popolazione e dalla ricchezza fondiaria si avvicinavano assai, per modo che la quota così degli introiti come delle spese da attribuirsi alla Venezia Tridentina, poteva essere calcolata nella proporzione del 60 % di quelle di tutta la Provincia (Meneghini, *op. cit.*, pag. 333).

(1) Bonghi R., *Storia della finanza italiana dal 1861 al 1868*, pagg. 200 e 201. Firenze 1868. Successori Le Monnier.

(2) Santoro M., *L'Italia nei suoi progressi economici dal 1860 al 1910* pagg. 328 e 329. Roma 1910, Tipografia popolare.

Ecco i risultati delle sue laboriose indagini:

	Valore capitale (in milioni di lire)	Reddito lordo annuo (in milioni di lire)	Reddito netto annuo (in milioni di lire)
Miniere e cave	500	45	20
Beni rustici.	15.000	1.760	600
Bestiame	5.500	700	135
Fabbricati	3.375	400	275
Industrie varie	6.000	900	300
Mobilia e oggetti preziosi . .	1.000	—	—
Crediti ipotecari	550	30	30
Altri capitali fruttiferi . .	1.500	75	75
Capitali infruttiferi o altrimenti impiegati	1.000	—	—
Totale . .	35.425	3.910	1.435

Mentre l'autore di questo studio ritiene abbastanza esatto il calcolo del patrimonio dei privati, egli crede che il reddito sia stato calcolato in una misura assai inferiore alla realtà, anzi che il SANTORO sia partito da un concetto di reddito incompleto, perchè sembra che il S. non consideri come reddito netto nazionale la somma dei redditi netti di cui disponeva ciascuno dei 25 milioni di Italiani che vivevano allora in Italia, ma come reddito netto soltanto il reddito dei proprietari di beni rustici, di fabbricati, degli industriali e dei possessori di capitali mobiliari, non comprendendo nel conto il reddito degli operai dell'agricoltura e dell'industria, dei commercianti, dei professionisti e degli impiegati degli enti pubblici e delle amministrazioni private; e come reddito lordo il solo prodotto lordo dell'agricoltura, dell'industria, dei capitali mobiliari e del lavoro agricolo e industriale, non comprendendo nel conto i compensi del commercio, delle professioni liberali e degli impieghi pubblici e privati.

Ma anche considerando come reddito netto quello che il SANTORO chiama reddito lordo e che — a mio parere — è soltanto una parte del complessivo reddito netto dei privati, la stima di 3.7 miliardi di lire è troppo bassa, se riferita ad un patrimonio di 35.4 milioni, perchè in questo caso il reddito rappresenterebbe soltanto il 10 % circa del patrimonio, rapporto troppo basso per un paese di modeste condizioni economiche, come il nostro, dove una parte considerevole

del reddito proviene dal puro lavoro e non dal possesso del capitale, mentre detto rapporto è certamente — come sarà meglio chiarito fra poco — del 17 o del 18 %, rapporto che partendo da un patrimonio di 35.4 miliardi darebbe un reddito di 6018 o di 6372 milioni di lire.

2. — Per accertare il reddito dei privati verso il 1860, noi procederemo per tre vie, che se sono tutte e tre corrette, devono condurre non diremo ad un identico risultato, non essendo possibile in questo genere di ricerche di raggiungere conclusioni precise, ma a risultati non troppo differenti.

Il reddito dei privati di una Nazione si può anzitutto desumere dal patrimonio dei privati stessi, quando si conosca il coefficiente di correlazione fra patrimonio e reddito. Ed invero lo studio dei rapporti quantitativi fra patrimonio nazionale e reddito nazionale dimostra che la percentuale del reddito varia fra il 12 ½ % del patrimonio, nei paesi che hanno molta ricchezza accumulata e nei quali le risorse materiali sono bene sfruttate, come avviene in Francia, e il 20 per cento in paesi come l'India inglese, con una ricchezza media molto bassa, ed una popolazione esuberante. Per l'Italia è ragionevole supporre una percentuale del 17-18 per cento, analoga a quella accertata per l'Austria-Ungheria prima della guerra, paese che assomigliava all'Italia sotto parecchi aspetti, sebbene fosse sensibilmente più ricco (1).

A sua volta troveremo il patrimonio dei privati usando il vecchio metodo dell'*intervallo devolutivo*, il quale consiste nel moltiplicare per l'intervallo devolutivo l'importo annuo medio delle successioni e delle donazioni, che hanno luogo in una data nazione.

Ricordiamo a questo proposito che per *intervallo devolutivo* s'intende quel periodo di tempo durante il quale una persona trattiene in suo possesso i beni ereditati o ottenuti per donazione, prima che essa debba, morendo, lasciarli alla sua volta ai suoi eredi e successori.

Questo periodo di tempo corrisponde quindi alla durata media di una generazione ereditaria, ossia alla sopravvivenza media dei figli ai genitori, che alla sua volta — nell'ipotesi che i figli vivano quanto i genitori hanno vissuto, — è eguale alla età media dei genitori alla nascita del loro figlio medio.

---

(1) Gini C. *A comparison of the wealth and national income of several important Nations.* Pag. 6. Roma 1925.

L'intervallo fra la morte dei genitori e la morte dei figli si può porre approssimativamente per l'Italia per i padri in 36.17 anni, per le madri in 32.17 anni (1) ma, come ha rilevato giustamente il GINI (2), non tutte le successioni hanno luogo fra genitori e figli, mentre nelle successioni fra coniugi, fra collaterali e tra estranei l'intervallo medio fra la morte del *de cujus* e la morte dell'avente causa è molto minore che per le successioni dirette.

Tenendo conto di questa circostanza l'intervallo devolutivo si deve ridurre per il nostro paese a 31.8 e, in cifra lievemente arrotondata, a 32 anni (3).

Se dunque in 32 anni tutti i patrimoni dei privati sono trasmessi dai loro proprietari ai successori, è ovvio che moltiplicando la media annuale dell'ammontare delle successioni e delle donazioni (ossia 1/32 del patrimonio dei privati) per 32, si otterrà il valore totale della ricchezza dei privati di una Nazione.

Sono note le critiche — a nostro parere esagerate — rivolte all'uso di questo metodo, — che ha il pregio di una logica perfetta e di una notevole semplicità, — le quali consistono principalmente nel rilevare la difficoltà di constatare il coefficiente di evasione del valore dichiarato dall'interessato e verificato dagli Uffici del Registro. E noi pure, per tener conto di quanto c'è di vero in queste critiche, se dovessimo accertare oggi il patrimonio dei privati di una Nazione non useremo che in via subordinata di questo metodo, valendoci invece principalmente di quello così detto *oggettivo* o *reale*, che consiste, nel constatare il valore dei terreni, dei fabbricati, degli stabilimenti industriali e commerciali, dei titoli, dei debiti dello Stato, delle Provincie e dei Comuni, degli altri capitali fruttiferi ed infruttiferi, della mobilia e della moneta.

Ma per applicare questo metodo, certamente più penetrante del primo, non solo alla ricerca del patrimonio attuale, ma a quella del patrimonio dei privati nei sei periodi in cui, per comodità di studio, divideremo in seguito la storia della finanza del Regno d'Italia dal dal 1860 ai nostri giorni, bisognerebbe procedere a rilevazioni così minuziose e lunghe da richiedere una pazienza straordinaria.

Non essendo forniti di così grande pazienza, abbiamo pensato di valerci principalmente del metodo dell'intervallo devolutivo, *integrando però il valore delle successioni e delle donazioni* non già *col*

(1-2-3) GINI C., *L'ammontare e la composizione della ricchezza delle Nazioni*. Pagg. 73, 76 e 77. Torino. Bocca. 1914.

coefficiente di integrazione del 25 % generalmente, ma inesattamente, usato, ma con quello *del 50 %* (1)

Ciò premesso, la seguente tabella (2) indica i valori accertati agli effetti della tassa sulle successioni e sulle donazioni pel solo Regno di Italia, senza le Provincie Venete ed il Lazio, dal 1864 a tutto il 1867; per il Regno d'Italia con le Provincie Venete, ma senza il Lazio, per gli anni 1868 e 1870.

Anni	Successioni (in milioni di lire)	Donazioni (in milioni di lire)	Passaggi di usufrutto (in milioni di lire)	Totale (in milioni di lire)	Totale aumentato di 1/2 (in milioni di lire)	Totale aumentato di 1/2 × 32	Media aritmetica del quadriennio 1864-1867 (in miliardi di lire)	Media aritmetica del periodo 1864-1871 (in miliardi di lire)
1864	607.1	129.7	—	736.8	1105.2	35.366	30.8	31.6
1865	560.5	298.5	—	859.1	1288.5	40.232		
1866	405.1	128.4	—	533.5	802.8	25.689		
1867	356.7	151.0	3.3	510.0	715.0	22.280		
1868	502.5	196.5	9.9	708.9	1062.0	33.984		
1870	534.1	118.8	21.1	674.0	1011.0	32 352		

Per le Provincie Venete e per lo Stato Pontificio, l'A. non ha trovato i valori accertati agli effetti delle imposte sulle successioni

---

(1) Il Gini (*Ammontare e composizione*, etc., op. cit. pagg. 217-218) per gli anni intorno al 1908 stabilì che il coefficiente di evasione ammontasse a circa il 50 % del valore reale, cioè al 100 % di quello dichiarato, il doppio quindi di quello applicato da noi.

Rilevando però che nel periodo a cui si riferisce la valutazione del Gini, l'evasione era necessariamente molto aumentata sia per la maggior importanza acquistata dalla ricchezza mobiliare, sia per l'aumento della aliquota dell'imposta di successione, si comprende facilmente che nei periodi precedenti il coefficiente doveva essere sensibilmente minore.

Nell'impossibilità di determinare per ciascuno di questi periodi l'effettivo coefficiente di evasione abbiamo creduto opportuno attenerci a quello del 50 % del valore dichiarato (33 % del valore reale) il quale, a nostro avviso, deve essere sufficientemente vicino alla realtà.

Tenga il lettore in ogni modo presente che detto coefficiente fu determinato congetturalmente e non fu accertato: i valori quindi, con esso integrati, per quanto sia nostra opinione che si avvicino assai ai reali, probabilmente da essi differiscono in qualche cosa, e tali differenze diventano tanto i maggiori quanto più ci si avvicina al 1908 periodo al quale si riferisce l'accertamento del Gini.

(2) Cfr. « Annuari del Ministero delle Finanze » dall'anno 1864 incluso, all'anno 1871 incluso.

e sulle donazioni; e cerca quindi di congetturare il valore totale del patrimonio dei privati per proporzionalità, sulla base seguente: nel triennio 1879, 1880, 1881 — e cioè soltanto circa quattro lustri dopo il periodo ora considerato — i versamenti e riscossioni fatte in conto tasse di successione *pel Veneto* sono stati in media di 2346 milioni di lire per anno; pel *Lazio* sono state in media di 1086 milioni di lire per anno, per tutto il Regno, meno il Veneto ed il Lazio di 25.000 milioni di lire (1).

E quindi le percentuali dei suddetti versamenti, in relazione a quelli di tutto il Regno, meno il Veneto ed il Lazio, sono stati del 9.12 per cento per il Veneto, e del 4.30 per il Lazio, e complessivamente del 13.42 per cento.

Supponendo che nel quadriennio 1864-1867 (2) le proporzioni fossero le stesse, poichè il totale dei versamenti per il Regno d'Italia in questo quadriennio è stato in media di 9.8 milioni di lire (3), ne deriva che la ricchezza del Veneto, supposta di 30.8 miliardi quella del Regno, sarebbe stata di 2.8 miliardi, quella del Lazio di 1.3 miliardi di lire e complessivamente la ricchezza di tutta Italia (quale era dopo l'annessione di Roma) sarebbe stata di 34.9 milioni di lire (4).

3. — Ad un risultato non moltó differente si giunge per una

---

(1) Sensini G., *Le variazioni dello stato economico d'Italia nell'ultimo trentennio del secolo XIX*. Roma Loescher. 1904.

(2) Nulla gioverebbe invece partire dal dato delle entrate riscosse effettivamente nel Veneto e nello Stato Pontificio, perchè le tariffe erano differenti, e cioè più alte nelle Provincie venete, sensibilmente più basse nel Regno, mentre nello Stato Romano erano esenti le successioni e donazioni ai figli e agli altri discendenti, e quelle lasciate agli ascendenti (Alessio G., *Saggio sul sistema tributario Italiano*. Vol. II, pagg. 119 e 120. Torino. Bocca. 1883.

(3) *Annuari del Ministero delle Finanze* per gli anni 1865, 66, 67 e 68.

(4) « Mentre è certo che la ricchezza di ciascuna regione non rappresenta lo stesso multiplo del riscosso a titolo di tassa di successione; perchè — prescindendo dai valori trasmessi per donazioni *inter-vivos*, — lo stesso riscosso può essere ottenuto con i più svariati saggi di imposte, e perciò non è proporzionale ai valori trasmessi *mortis causa*, è invece ovvio che, se è data la ricchezza di un paese in cifra assoluta, il riparto di questa ricchezza tra le varie regioni che lo costituiscono, può calcolarsi direttamente dal riscosso in ciascuna regione a titolo di tassa di successione, perchè è proporzionale ad esso ». (Pantaleoni M., *Delle regioni d'Italia in ordine alla loro ricchezza ed al loro carico tributario*, in « Giornale degli Economisti » gennaio 1891).

seconda via indicata dal GINI (1). Verso il 1860 o poco dopo il MAESTRI (nell'*Annuario Statistico Italiano* pel 1863-64. Torino. 1864 pag. 451) valutava la produzione agraria e del bestiame di tutta Italia a circa tre miliardi al lordo, e ammetteva un rapporto di essa al valore della proprietà rurale di 15 a 100, il che portava ad un valore della proprietà rurale di circa 20 miliardi. In quell'epoca la percentuale rappresentata dalla proprietà rurale (che, attraverso il tempo, diminuisce in tutti i paesi di cui si hanno dati) si poteva calcolare di circa il 65-70 per cento [oggi è in Italia soltanto di circa il 40 per cento (2)], e quindi la ricchezza dei privati si poteva calcolare in 32.5-29.2 miliardi di lire. Ma il MAESTRI si basava su elementi assai invecchiati e senza tener conto della notevole elevazione posteriore dei prezzi (3).

4. — Ad una conclusione piuttosto differente dalla seconda, ma più vicina alla prima, si giunge invece per una terza via. Applicando il metodo dell'intervallo devolutivo noi abbiamo trovato che la ricchezza complessiva dei privati in Italia, che nel periodo 1872-76 risultava di 42.1 miliardi di lire, nel periodo 1893-1898 era salita a 56.1 miliardi di lire. La ricchezza dei privati in Italia sarebbe aumentata in 26 anni del 33 per cento circa, ossia in media dell'1.26 per cento all'anno. Nella ipotesi che la ricchezza dei privati sia cresciuta con la stessa percentuale anche dal 1863 al 1871 (incluso), essa nel 1873 sarebbe stata di 38.2 miliardi di lire.

E così otteniamo;
per proporzionalità ad un successivo valore dei versamenti e riscossioni in conto tassa di successione 34.9 miliardi;
per proporzionalità col valore della proprietà rurale 30.8 miliardi;
per proporzionalità ad un successivo valore dei patrimoni dei privati 38.2 miliardi;
e facendo, come è opportuno, la media di questi tre risultati, veniamo alla conclusione che, verso il 1860 il patrimonio dei privati sarebbe stato di circa 35.6 miliardi di lire (4).

---

(1) GINI C., *L'ammontare e la composizione della ricchezza delle Nazioni* op. cit. pag. 562,

(2) GINI C., *A comparison of the wealth and national income* etc., op. cit. pag. 6.

(3) VALENTI G., *L'Italia agricola dal 1861 al 1911*, pagg. 89, 90 in « Cinquanta anni di storia italiana ». Vol. I. Pubblicazione fatta per iniziativa della R. Accademia dei Lincei. Milano Hoepli 1912.

(4) Questo ammontare è quasi eguale a quello calcolato dal Santoro in 34.425 mil. di lire. Cfr. SANTORO M., *L'Italia nei suoi progressi economici.*, op. cit., pag. 328.

Nella ipotesi che nel nostro paese il reddito rappresenti il 17-18 % del patrimonio, a questo patrimonio avrebbe corrisposto un reddito di 5.8-6.2 miliardi di lire.

Riferendo ad esso l'importo delle contribuzioni dell'anno 1863 per 711 milioni di lire una percentuale dell'11.46-12.25 %, ed in media dell'11.85, che indica la pressione che in quell'anno le contribuzioni esercitavano sul complessivo reddito dei privati.

Capitolo III.

Le condizioni economiche dell'Italia verso il 1860.

1. — La precedente valutazione, che potrà forse sembrare ad alcuni troppo elevata, trova invece conferma nelle condizioni che passiamo a descrivere, dell'agricoltura, dell'industria e del commercio, certo molto inferiori a quelle attuali, in considerazione specialmente dell'ancòra modesto sviluppo delle applicazioni della scienza ai vari rami della produzione economica, ma non poi meschine, e neppure eccessivamente depresse.

Verso il 1860, la superficie e la popolazione del Regno d'Italia, del Veneto e dello Stato Pontificio erano calcolate come segue:

	Kmq.	popolazione (presente)	popolazione per Kmq.
Regno d'Italia	259.900	21.777.334 (1)	83.78
Province Venete e di Mantova .	25.043	2.446.398 (2)	96.—
Stato Pontificio	11.800	692.112 (3)	67.—
Per tutta Italia senza la Venezia Tridentina e Giulia. . .	269.743	24.915.844	83.—
Distretto di Trento . . .	6.131	321.220 (2)	52.39
Distretto di Bressanone . .	7.369	192.060	26.06
Trieste, Gorizia, Gradisca, Distr. Italiani della Carniola e Istria, senza il Distretto di Volosca e le isole	8.060	526.893 (2)	65.37
Totale . .	318.303	25.955.957	81.23

(1) Secondo il censimento del 31 dicembre 1861 del *Regno d'Italia*.
(2) Secondo il Censimento del 31 ottobre dell'Impero austriaco.
(3) Vedi: «Civiltà Cattolica» 1865, pagg. 734.e 735.

L'*Annuario statistico* per il 1864 (pag. 393) presentava poi il seguente quadro dimostrativo delle varie colture.

	Terreni arativi con e senza viti (ettari) (000)	Prati naturali e artificiali (ettari) (000)	Risaie (ettari) (000)	Oliveti (ettari) (000)	Castagneti (ettari) (000)	Boschi (ettari) (000)	Pascoli (ettari) (000)	Stagni valli e paludi (ettari) (000)	Terreni incolti (ettari) (000)
Regno d'Italia	10.011.1	859.7	119.4	552.3	579.9	3926.9	5091.8	1018.7	2615.1
Stato Pontif.	538.3	34.9	—	28.5	10.7	276.2	202.1	25.7	35.4
Venezia . .	912.0	299.9	25.2	2.3	5.2	230.3	301.9	128.4	254.7
Mantova . .	79.8	13.8	0.1	—	—	0.9	3.7	—	—
Totale .	11.541.4	1.208.3	144.9	583.2	595.8	4434.5	5599.5	1170.8	2885.3

Verso il 1860 la produzione delle principali derrate agricole per tutta Italia (senza la Venezia Giulia e Tridentina) era la seguente (1).

	Ettolitri
Frumento	35.820.264
Granoturco	16.900.076
Segala	3.000.000
Orzo ed avena	2.700.000
Riso	1.433.412
Altri cereali	6.500.000
Totali cereali . .	66.353.725

Altri prodotti agricoli:

Vino	24 milioni di ettolitri
Olio	1.565.284 »
Patate	9.537.660 »
Pomidoro . . .	9.513.000 »
Legumi secchi . . .	4.108.390 »
Castagne	5.395.660 »
Bozzoli	51.000.000 di kg.

(1) *Annuario statistico italiano* per cura di C. Correnti e di P. Maestri, *op. cit.* anno II pag. 407-408.

La quantità di cereali importata ed esportata durante i tre anni 1863-1865 è indicata dalla seguente tabella (1)

		1863	1864	1865
Importazione	Frumento . .	4.501.366	7.604.302	5.319.076
	Grani diversi .	578.101	690.469	313.516
Esportazione	Frumento . .	865.169	205.672	428.722
	Grani diversi .	627.964	522.164	327.205

Il totale dei grani importati in Italia si eleva, in media, in ciascun anno a 6.343.309 ettolitri, superando per conseguenza il totale dell'esportazione di 5.343 309 ettolitri.

Per quanto riguarda il bestiame, che è stato quasi sempre scarso in Italia, il Dott. MAESTRI nel più volte citato suo *Annuario statistico pel 1864* dà le seguenti cifre per il Regno d'Italia con la Venezia e lo Stato Pontificio.

Bovi, tori e vacche	3.708.635
Cavalli, asini e muli	1.391.626
Pecore	8.806.514
Capre	2.233.817
Porci	3.886.731
Totale . .	20.027.323

In confronto degli animali posseduti dalla Francia, le cifre sopra esposte non rappresentavano che il solo terzo del bestiame grosso e il quinto del bestiame piccolo.

Per quanto si riferisce all'industria propriamente detta, la sua condizione non può essere adeguatamente rappresentata con la prova che in questi casi è la più convincente: le cifre; e ciò perchè nei primi tempi della nostra unificazione i dati non furono raccolti in quantità sufficiente. In ogni modo le notizie disponibili sono bastevoli per dimostrare che nel 1861, noi eravamo assai lontani — è vero — dal grado di progresso cui erano giunte Francia e Inghilterra, ma che la massima parte delle industrie, che ora fioriscono in Italia, non

(1) P. MAESTRI., *L'Italie économique en 1867*, pag. 52.

sono che le dirette, per quanto ingigantite, discendenti di quelle che allora esistevano (1).

« Il macchinismo — questa forma caratteristica dell'industria moderna — aveva trovato le sue prime, importanti applicazioni nel Nord della Penisola già prima della unificazione. Il 1815 aveva lasciato l'Italia, presso che in tutte le sue parti, un paese agricolo, di coltura spesso estensiva, con poche industrie domestiche pel consumo locale; il 1860 trovato aveva lo stesso paese già preparato ad entrare, con una industria che aveva già fatto le sue prime prove, nel campo della concorrenza internazionale. Nel periodo 1815-1860 sono nate in Italia tutte o quasi le forme dell'industria che l'unità avrebbe fatto poi largamente fiorire; embrioni, formazioni nuove che attendevano il sole della libertà, per compiere la loro evoluzione. Nel 1860 quello che potrebbe chiamarsi il primo impianto è già fatto; resta da farlo funzionare in pieno. La esistenza delle forme moderne di capitalizzazione, di circolazione delle ricchezze (banche, risparmio, assicurazioni, società industriali, camere di commercio) è sintomo infallibile che il capitalismo vi era già entrato almeno in adolescenza. Le industrie cominciano a vivere, nella loro forma più moderna, precisamente in questo periodo » (2).

3. — Per quanto si riferisce al commercio, prima della unificazione esso si trovava in condizioni diverse nei vari Stati; gli Stati Sardi, già da tempo liberi e governati da ordinamenti moderni, con buone vie di comunicazione tanto all'interno quanto alle frontiere con gli altri Stati, con tariffe doganali miti e dazi interni insensibili, vedevano sempre più accrescersi i loro proventi commerciali (3). E così pure nel Lombardo-Veneto, per quanto il sistema dei dazi esterni fosse predisposto, come del resto era nella logica della amministrazione austriaca, a *proteggere* l'industria lombardo-veneta dalle importazioni degli altri Stati d'Italia, ed a favorirvi invece le importazioni delle provincie dell'Impero. Ma gli altri Stati, stretti ancora da ordinamenti antiquati e da irrazionali pastoie, vedevano ridotti i rispettivi commerci in limiti molto ristretti.

Nel 1863, e pel solo Regno d'Italia, le importazioni erano state

---

(1) Racca V., *Il progresso dell'industria italiana* in « Mezzo Secolo di vita italiana (1861-1911) pag. 67. Milano, Vallardi 1911.

(2) Agnelli A., *Il fattore economico nella formazione della unità italiana*. Nella Rivista « Il Risorgimento Italiano » 1913, fascicoli 2 e 3.

(3) Santoro M., *L'Italia nei suoi progressi economici*, op. cit. pag. 317.

di 982 milioni di lire pel commercio generale e di 902 milioni pel commercio speciale; le esportazioni erano state di 700 milioni di lire pel commercio generale e di 633 milioni pel commercio speciale (1).

Capitolo IV.

Incremento delle contribuzioni dal 1863 ai nostri giorni.

1. — Nelle pagine precedenti abbiamo potuto fissare in 711 milioni di lire l'importo delle contribuzioni pagate complessivamente dai cittadini del Regno d'Italia, della Venezia e dello Stato Pontificio.

Le tabelle pubblicate in Appendice indicano anno per anno o quinquennio per quinquennio a seconda del periodo agitato o tranquillo della vita nazionale cui si riferiscono, le contribuzioni dello Stato, delle Provincie e dei Comuni, distinte secondo le loro forme principali, di cui abbiamo precisato l'importo.

Ma non possiamo limitarci ad una arida esposizione di cifre, perchè le entrate dello Stato da una parte sono dipendenti dalle condizioni economiche della Nazione, e dall'altra subiscono l'influenza della spesa, che è regolata non soltanto da criteri economici, ma anche da criteri politici e sociali.

Noi quindi, accogliendo quella ripartizione in periodi della finanza italiana, che è stata già fatta con acume e con esattezza dal prof. de Johannis (2), e completandola in modo da giungere sino ai nostri giorni, divideremo la storia della finanza italiana nei sei periodi seguenti:

1) Periodo costruttivo: dal 1861 al 1876, in cui la direzione delle finanze è quasi sempre tenuta alternativamente dal Sella e dal Minghetti, tranne il periodo Scialoia e quello Cambray Digny, che mediante sforzi tenacissimi, riescono a poco a poco ad eliminare il disavanzo, che minacciava la nostra finanza sino dalla costituzione del Regno. Infatti nel 1863 il disavanzo (includendo fra le spese effettive anche quelle per le costruzioni ferroviarie) era 405.2 milioni.

Quale fosse il disavanzo nell'anno precedente ed in quelli immediatamente seguenti, è dimostrato dalla seguente tabella (3).

---

(1) *Saggio sul commercio esterno terrestre e marittimo del Regno d' Italia negli anni 1862 e 1863* (pubblicazione del Ministro delle finanze). Firenze 1863.

(2) de Johannis J., *La Finanza*, in « Mezzo secolo di vita italiana » (1861-1911) Milano. Vallardi.

(3) de Johannis J., *op. cit.*, pag. 32.

anni	disavanzo (in milioni)	anni	disavanzo (in milioni)	anni	disavanzo (in milioni)
1862	455.7	1867	204.8	1872	117.1
1863	405.2	1868	276.1	1873	139.5
1864	396.9	1869	195.1	1874	60.3
1865	259.6	1870	248.5	1875	33.5
1866	739.8	1871	78.6	1876	27.5
	2257.2		993.1		377.9

Sono tre miliardi 628 milioni di disavanzo in 15 anni. Questa cifra indica le immense difficoltà che dovettero superare per raggiungere il pareggio gli uomini che in quel periodo tennero il timone della finanza pubblica. Ed è commovente ricordare quale significato patriottico racchiudeva nella mente di tutta la Nazione la parola *pareggio*; pareva che l'unità politica non potesse ritenersi assicurata se non quando la Finanza pubblica fosse veramente sistemata.

« Già nel 1861 l'interesse del debito pubblico assorbiva 143 milioni di entrate; la cifra non fece che aumentare negli anni seguenti, giacchè il debito crebbe spaventosamente.

« E mentre tale era la situazione del bilancio, il nuovo Stato doveva affrontare spese ingenti non solo per la propria organizzazione, non solo per gli armamenti di terra e di mare, in vista delle nuove lotte da sostenere per il compimento della Unità Nazionale, ma anche per l'imprescindibile dovere di far sentire alle popolazioni i benefici effetti del nuovo ordine di cose, mediante la introduzione e l'applicazione di quei portati della civiltà, che già negli altri grandi Stati di Europa avevano avuto largo sviluppo.

« Tasse, economie, vendite di beni demaniali furono gli espedienti cui gli uomini di governo dovettero più volte piegarsi. Ma le tasse non potevano andare al di là di un certo limite, perchè, dato il basso livello della ricchezza privata, potevano diventare insopportabili e suscitare agitazioni pericolose; una media di 24 lire per abitante pareva già gravosa » (1).

In questo periodo le contribuzioni crescono rispettivamente da 513.1 milioni per lo Stato, e 197.9 milioni per i Comuni e le Provincie, e cioè da una somma totale di 711 milioni (nel 1863) rispettivamente a 916.6 milioni per lo Stato ed a 298.4 milioni per i Co-

(1) Silva P., *Il sessantasei*, pagg. 125, 127, op. cit.

muni e le Provincie; e cioè ad una somma totale di 1215 milioni, con un aumento del 22,44 per cento.

2) Dal 1876 al 1887 segue il *periodo delle illusioni*; dal 1877 al 1883 tutti i bilanci appaiono in avanzo di qualche decina di milioni, ma, se si includono tra le spese effettive anche quelle per le costruzioni ferroviarie, si hanno disavanzi crescenti da 22.3 milioni nel 1877 a 369.3 milioni nel 1887/88. In questo esercizio le contribuzioni dello Stato raggiungono i 1131.3 milioni e quelle dei Comuni e delle Provincie i 392.8 milioni, e quindi complessivamente 1524.1 milioni, con un aumento sul dato iniziale di questo periodo del 25.44 per cento.

3) Dal 1888 al 1892 segue un *periodo di decadenza*; continua il disavanzo, ma ciò che è ancora più allarmante è l'arresto delle entrate, che le nuove imposizioni non smuovevano, sebbene il contribuente non fosse certamente lasciato tranquillo. Le contribuzioni dello Stato avevano toccato i 1131.3 milioni nel 1887, e si trovano ancora a 1145.4 milioni nel 1893/94. Invece in questo stesso periodo le contribuzioni dei Comuni e delle Provincie, che avevamo lasciato a 329 milioni per il 1887 raggiungono i 457.3 milioni nel 1893, e così complessivamente le entrate degli enti pubblici raggiungono verso il 1893/94 i 1610.7 milioni.

Questo periodo di decadenza delle finanze dello Stato corrisponde ad un periodo di languore e di depressione della vita economica del paese, che sarà descritto in seguito.

4) *Dal 1893/94 al 1897/98* la finanza italiana, per opera specialmente dei Ministri Sonnino (dal dicembre 1893 al maggio 1896) e Luzzatti (del marzo 1896 al giugno 1898) fu oggetto di un'*opera di ricostituzione*, e sebbene persista il disavanzo — specialmente in conseguenza delle spese per la guerra d'Africa — esso si manifesta in misura minore che nel periodo precedente fino quasi a scomparire sia per l'istituzione di nuove imposte e per l'aumento del saggio di alcune preesistenti, in quegli anni deliberato, sia per l'opera assidua e meticolosa di economia nell'amministrazione che il Luzzatti svolse negli ultimi anni di questo periodo.

Nell'esercizio 1897/98 le contribuzioni a favore dello Stato raggiungono la cifra di 1253.8 milioni, quelle a favore dei bilanci dei Comuni e delle Provincie rimangono stazionarie intorno ai 455 milioni (le suddette contribuzioni sono state precisamente di 454.5 milioni nel 1897) e così complessivamente le entrate degli enti pubblici raggiungono verso il 1897/98 l'importo di 1713.3 milioni di lire.

5) Segue il periodo 1898/99-1913/14, che si può esattamente

chiamare il *periodo dell'anteguerra*, e che si può suddistinguere in due intervalli, dei quali il primo giunge sino al 1910-11. In questo intervallo sono persistenti gli avanzi di decine di milioni; nonostante che crescano in modo cospicuo le spese, anche le entrare continuano a dare un cospicuo aumento, malgrado siano stati scarsi gli aumenti dei balzelli. Nel secondo intervallo, e cioè negli esercizi 1911/12-1913/14 i bilanci si presentano in disavanzo, (guerra di Libia), ma la causa era di indole transitoria e si poteva ragionevolmente confidare che il disavanzo sarebbbe sparito con il consolidamento della nostra occupazione della Libia. Questa fiducia doveva invece riuscire vana per lo scoppio della guerra delle Nazioni e per la nostra partecipazione ad essa, che d'altra parte ha presentato per il nostro Paese una dolorosa, ma indeclinabile, necessità.

Nell'esercizio 1913/14, quello immediatamente precedente lo scoppio della grande guerra, le contribuzioni a favore del bilancio dello Stato avevano raggiunto la cifra di 2157.7 milioni di lire (in quel periodo il prezzo della lira-carta era eguale a quello della lira-oro), il totale delle contribuzioni pagate alle Provincie era di 147,5 milioni di lire; il complesso delle contribuzioni ammontava quindi a 2997.2 milioni di lire.

6) Viene ora il *periodo della guerra e dell'immediato dopo-guerra*, contrassegnato da aumenti enormi nella spesa, e da aumenti essi pure rilevantissimi, ma minori di quelli della spesa, nelle entrate ordinarie. Gli è che ad una parte della spesa si provvede con la emissione di carta-moneta, dapprima limitata, poi sempre più abbondante, sino ad assumere dimensioni preoccupanti nell'immediato dopo-guerra.

In ogni modo nell'esercizio 1924/25 il totale generale delle contribuzioni pagate allo Stato è stato di 17.783 milioni di lire-carta, il totale delle contribuzioni pagate ai Comuni è stato di 3754.7 milioni di lire-carta, il totale delle contribuzioni pagate alle provincie è stato di 703.3 milioni di lire-carta; il complesso delle contribuzioni è stato quindi 22.240 milioni di lire-carta (sulla base dei numeri-indici dei prezzi all'ingrosso) (1) eguali a 3813 milioni di lire prebelliche. E così la somma delle contribuzioni dal 1913/14 al 1924/25 è aumentata da 2.9 a 3.8 miliardi di lire prebelliche, con un aumento sul dato iniziale di questo periodo del 31 per cento.

---

(1) Per i dodici mesi dal 1° luglio 1924 al 30 giugno 1925 il numero-indice dei prezzi all'ingrosso calcolato dalla Camera di Commercio di Milano è stato in media di 583.

Capitolo V.

Incremento del patrimonio e del reddito Nazionale dal 1861 al 1876.

1. — Dopo di aver fissato nelle pagine precedenti gli aumenti delle contribuzioni prelevate a favore dello Stato, dei Comuni e delle Provincie nei vari periodi in cui abbiamo suddiviso la storia della nostra finanza dal 1861 ai nostri giorni, ci proponiamo di accertare quale fosse, in corrispondenza dei periodi indicati, il reddito dei privati, che per le ragioni già indicate a pag. 158 desumeremo anzitutto dal patrimonio, cercando di completare ed eventualmente di correggere il risultato così ottenuto con elementi che esprimono lo stato della produzione agricola, industriale, i prezzi dei relativi prodotti, l'importanza ed al volume del commercio, il reddito dei fabbricati urbani, il numero degli operai ed i loro salari, il numero dei professionisti e degli impiegati degli enti pubblici e delle aziende private ed i compensi da loro ottenuti, le entrate dei possessori dei titoli del debito dello Stato, delle Provincie e dei Comuni, le rimesse degli emigrati e cioè le più importanti partite del reddito Nazionale.

Come abbiamo dimostrato a pag. 161, il valore del patrimonio dei privati (Veneto e Lazio compresi) dal 1864 al 1870, si può considerare di circa 36 o 37 miliardi di lire.

Per gli anni dal 1873 al 1876 presentiamo la seguente tabella, di cui le prime 5 colonne sono riprodotte da una pubblicazione del Sensini (1) e le ultime 3 da noi elaborate.

Anni	Successioni	Donazioni	Passaggi di usufrutto (*)	Totale	Totale aumentato di $^1/_3$	Totale aumentato di $^1/_3 \times 32$	Media del quinquenio
	(in milioni di lire)						(in miliardi di lire)
1872	655.8	109.1	20.9	785.9	1178.8	37.7	
1873	628.9	104.6	20.1	753.7	1130.5	36.1	
1874	730.5	121.6	23.3	875 5	1313.2	42.0	42.1
1875	858.0	142.2	23.7	1024.0	1536.0	49.1	
1876	809.0	133 9	21.2	964.3	1426.4	45.6	

(*) Le somme riportate sono quelle effettivamente trasmesse, ossia il doppio di quelle che si trovano nelle statistiche finanziarie.

(1) Sensini G., *Le variazioni dello stato economico d'Italia*. Op. cit. pagg. 295, 296.

Ciò che subito ci colpisce in questa tabella è la decisa e sensibile tendenza all'aumento della ricchezza privata, che da una media di 34.6-34.9 miliardi nel periodo 1861-1870 giunge ad una media di 52.2 miliardi nel periodo 1872-1876.

Corrispondentemente il reddito sarebbe aumentato da 5.8-6.2 miliardi a 7.1-7 5 miliardi, sempre nella plausibile ipotesi che il reddito rappresenti il 17-18 per cento del patrimonio.

2. — Anche tutti gli altri indici della ricchezza Nazionale sono in questo periodo eulogici.

Così la produzione agricola nel periodo 1861-1876 ha presentato le seguenti variazioni: (1).

	1861	1870-74		1861	1870-74
Frumento (in milioni di ettol.)	35.8	51.7	Bovini . . .	3.708.635	4.783.322
Granoturco (id.)	16.9	31.0	Asinini . . .	—	674.246
Riso (id.). . .	1.4	9.8	Ovini	8.806.514	8.596.108
Vino (id.). . .	24.0	27.1	Caprini . . .	2.233.817	2.016.307
Olio (id.) . . .	1.5	3.3	Suini	3.886.731	1.163.916
Agrumi (milioni di frutti) . .	—	2.6			
Bozzoli (milioni di kg.). . .	51.1	48.1			

Come si vede tutti i prodotti sono in sensibile aumento meno i bozzoli e il numero degli animali piccoli.

Secondo il censimento del 1871, che dava una popolazione totale presente di 26.8 milioni di abitanti, il numero delle persone occupate nella agricoltura e nella silvicoltura era cresciuto da 8.4 milioni nel 1861, a 8.8 milioni con un aumento soltanto assoluto, ma non relativo all'incremento della popolazione complessiva.

Per quanto riguarda l'industria nella impossibilità in cui siamo di accertare tutti i prodotti della industria manufattrice ed i relativi prezzi, ci limitiamo ad indicare le variazioni delle importazioni del carbon fossile, ed a partire dal 1890 anche quelle del consumo

(1) Per il 1861 cfr. l'*Annuario del Correnti*, pagg. 407.408 e per il periodo 1870-1874: VALENTI G., L'*Italia agricola*, in «Cinquanta anni di vita italiana». Op. cit., Vol. I.

della energia elettrica, ottimi indici dello stato industriale di un popolo, che non ha proprie miniere di carbone, nonchè le importazioni del cotone greggio, che viene elaborato da uno fra i più importanti rami dell'industria nazionale.

L'importazione di carbon fossile, che era stata di 374.949 tonnellate nel 1862, era salita a 791.389 tonnellate nel 1871 per raggiungere 1.454.223 tonnellate nel 1876 (1).

Così pure l'importazione del cotone in bioccoli od in massa, che era stata di 40.442 ql. nel 1862 (2), era salita a 270.000 nel 1878 (3).

Ricorderemo ancora che nel 1861 nel solo *Regno d'Italia* su una popolazione di 21.7 milioni di abitanti, gli agricoltori proprietari erano fra maschi e femmine 1.264.753; i mazzadri 1.248.286, gli affittaiuoli 310.019; gli agricoltori giornalieri, con occupazione precaria e salari meschini, 2.695.977; gli agricoltori coloni 319.457.

Nel 1861 l'industria mineraria occupava 58.551 operai, dei quali un terzo era occupato nelle sole miniere di zolfo della Sicilia.

Le industrie manufattrici tenevano in esercizio 3.072.245 operai dei due sessi, che si ragguagliavano al settimo degli abitanti (4).

Comparativamente più numerosa appariva la popolazione manifattrice nelle Provincie meridionali e siciliane, non già che ivi le industrie avessero raggiunto un maggiore incremento, ma soltanto perchè là gli abitanti raccolti in grossi centri o borghi, esercitando nell'inverno qualche arte, seguita in più propizia stagione dall'agricoltura, si denunciavano come artigiani. Il censimento del 1861 ebbe luogo appunto nell'inverno, come quasi tutti i successivi (5). In ogni modo il numero delle persone occupate nell'industria risultava nel 1861 di 3.1 milioni, che aumentava a 3.4 milioni nel 1871.

Gli operai, commessi e impiegati addetti al commercio, specialmente dei trasporti, erano 218.734 nel 1861 e salivano a 534.485 persone nel 1871.

Nel 1861 i *poveri* ascendevano a 309.196 e cioè all'1.4 per cento della popolazione.

Il tonnellaggio delle navi a vela ed vapore presentò i seguenti progressi: (6)

---

(1) Sensini, *op. cit.*, pagg. 93-94.

(2) *Annuario dell'Italia economica* per cura di C. Correnti e di P. Maestri anno II°, *op. cit.*

(3) Sensini, *op. cit.*, pag 115.

(4) Censimento del 1861. Vol. III. pag. X e segg.

(5) Benini R., *La Demografia* in « Cinquanta anni di storia it.», op. cit. Vol. I.

(6) *Annuario statistico italiano pel 1878*. Parte II, pag. 18.

	1861 per tutta Italia compresa la Venezia e l'Istria. tonnellate	1861 per tutta Italia senza la Venezia e l'Istria tonnellate	1871 per tutta Italia senza la Venezia e l'Istria tonnellate
Navi a vela . . .	983.800	928.152	1.020.488
Navi a vapore . .	53.147	24.656	57.341
Totale . .	1.036.947	952.806	1.078.829

Per quanto si riferisce ai salari degli operai, in numero delle ore di lavoro necessario per comperare un quintale di frumento per gli operai di sette grandi opifici, tutti dell'Italia settentrionale e della Liguria (cinque per le industrie tessili, uno per la fabbricazione della carta e uno per quella delle candele steariche) presentò dal 1871 al 1876 le seguenti variazioni:

	ore di lavoro
1871	183
1872	185
1873	202
1874	199
1875	146
1876	148

con qualche tendenza alla diminuzione nei due ultimi anni.

Per quanto riguarda le rimesse degli emigrati, esse in questo periodo dovevano essere minime in relazione alla scarsa importanza che aveva allora in Italia il fenomeno della emigrazione.

Se è vero che il censimento eseguito nel 1871 dava come residenti all'estero 455.000 italiani, questi erano in gran parte i residui di molti anni di precedenti emigrazioni, perchè il numero medio annuo degli emigrati dal 1869 al 1874 è stato soltanto di circa 23.000 persone che si sono recate oltre l'Oceano, e di circa 95.000 persone che si sono recate in Europa o negli altri paesi del Bacino del Mediterraneo (1).

3. — È bene tener pure presente che nel *nuovo Regno* la rendita catastale dei terreni e dei fabbricati rurali sarebbe stata nel 1861 di

(1) Coletti F. *Dell'emigrazione italiana,* pag. 22 e segg. in «Cinquanta anni di vita italiana», op. cit. Vol. II.

394.9 milioni di lire (1), per cui la rendita catastale per ogni ettaro censito sarebbe stata di sole lire 18.79 (ettari censiti 21.070.000).

La rendita *imponibile* dei fabbricati urbani, sui quali l'imposta fu introdotta con la legge 26 gennaio 1865, presentava le seguenti variazioni (2).

	milioni di lire
1866	252.4
1867	271.8
1869	269.6
1870	272.8
1871	301.1
1873	315.2
1876	334.3

Il debito pubblico, non redimibile e redimibile, nel momento della unificazione ammontava ad un capitale di 3092 milioni di lire e per questo debito lo Stato aveva pagato nel 1861 a titolo di interesse ai possessori dei titoli 148.7 milioni di lire.

Nel 1876 il capitale del debito pubblico era salito a 10.141 milioni di lire, e gli interessi riscossi dai creditori giungevano a 482,4 milioni di lire (3).

Per quanto concerne l'imposta di R. M. si trova che il reddito imponibile, il quale era complessivamente nell'anno 1872 di 1055.7 milioni, si ripartiva nel modo seguente; colpito da ritenuta: lire 582.0 milioni; dichiarato a mezzo delle denuncie: 473.6 milioni. Di questa seconda somma spettavano 138.2 milioni agli Istituti di ogni genere, cosichè il reddito dichiarato *individuale* si riduceva a 345.3 milioni di lire, la quale cifra deve ritenersi assai inferiore al vero, quando si avverta che le pensioni, gli stipendi, gli assegni di ogni natura pagati dallo Stato ammontavano ad un reddito imponile di 117.7 milioni (già compresi, per altro, nella categoria dei redditi tassati per ritenuta), ed al doppio di questa cifra pel loro ammontare reale.

Il suddetto reddito imponibile colpito a mezzo di denuncia si ripartiva finalmente nelle proporzioni seguenti:

---

(1) *Annuario statistico pel 1881*, pag. 346.

(2) Maestri P. e Correnti C., *L'Italia economica nel 1873* pag. 37.

(3) *Annuario statistico italiano pel 1881*, pag. 346.

	milioni di lire	per 1000
Categoria *A.*	180.2	381
» *B.*	199.8	422
» *C.*	75.2	158
» *D.*	18.2	39
Totale . .	473.6	1000

Tutto considerato, e tenendo specialmente conto del significato eulogico di tutte le cifre indicate, riteniamo di avvicinarci assai alla realtà, esprimendo l'opinione che alla fine del periodo preso ora in esame il reddito fosse sensibilmente maggiore di quello che si ottiene dal dato del patrimonio (42.1 miliardi) nella ipotesi che il valore del reddito rappresenti il 17-18 per cento di quello del patrimonio e cioè di 7.1-7.5 miliardi, ma dovesse essere superiore di circa $^1/_3$ a questo importo, e raggiungere quindi i 9-10 miliardi di lire.

E poichè nel 1876 le *contribuzioni* dello Stato, delle Provincie e dei Comuni erano giunte a 1215 milioni di lire, possiamo concludere che in quell'anno la percentuale che le contribuzioni sottraevano al reddito era di circa il 12-13 per cento.

Capitolo VI.

Incremento del patrimonio e del reddito dei privati dal 1876 al 1887.

1. — In relazione al secondo periodo della finanza, a quello cioè che è stato chiamato il *periodo delle illusioni* (1876-1887), si presentano le seguenti cifre, che danno il valore del patrimonio dei privati, calcolato col metodo dell'intervallo devolutivo.

	Successioni (in milioni di lire)	Passaggi di usufrutto (in milioni di lire)	Donazioni (in milioni di lire)	Totale (in milioni di lire)	Totale aumentato di 1/2 (in milioni di lire)	Totale aumentato di 1/2 moltiplicato per 32 (in milioni di lire)	Media quinquennale e sessennale (in miliardi di lire)
1877	836.9	25.3	133.9	1067.3	1600.9	51.228	
1878	848.0	29.9	205.0	1033.8	1550.7	49 302	
1879	781.9	28.7	155 8	960.3	1440.4	46.092	50.1
1880	924.7	32.3	149.6	1107.9	1661.7	53.177	
1881	880.1	34.5	150.8	1095.7	1643.5	53.328	
1882	905.6	25.7	180.9	1112.1	1668.1	53 379	
1883	965.3	29.2	181.4	1171.9	1767.8	56.249	
1884/85	977.9	27.2	177.3	1187.5	1781.2	56.998	
1885/86	946.6	40.5	182.3	1172.8	1769.2	56.418	57.4
1886/87	1054.7	30.5	185.6	1263.1	1894.6	60.627	
1887/88	1061.4	30.6	177.8	1266.0	1899.0	60.768	

Valutando ora, come al solito, il reddito al 17 18 per cento del patrimonio, si ottiene per il quinquennio 1877/1881 un reddito di 8.5-9.0, e per il sessennio 1882/1887 un reddito 9.7 10 miliardi di lire

2. — Vediamo ora le variazioni avvenute nel periodo considerato dei vari elementi che compongono il reddito nazionale:

Agricoltura. Le variazioni della produzione delle principali derrate dal periodo 1870/74 al periodo 1882/1886 sono indicati nella seguente tabella:

	Periodo 1870-74	Periodo 1882-86
Frumento (in milioni di ettol.) . . .	51.7	45.0
Granoturco » » . . .	31.0	29.3
Riso » » . . .	9.8	8.0
Vino » » . . .	27.1	27.6
Olio » » . . .	3.3	1.9
Agrumi (in milioni di frutti). . . .	2.6	3.3
Bozzoli (milioni di kg.).	48.8	36.7

La diminuzione è generale per tutti i prodotti, con eccezione del vino, la cui produzione si può considerare stazionaria, e degli agrumi

la cui produzione è aumentata. E non è a pensare che l'aumento del prezzo abbia compensato i produttori della diminuzione del prodotto, perchè anzi i prezzi medii delle derrate agricole nel periodo 1882/1886 sono sensibilmente inferiori a quelli del periodo 1870/1874, come risulta dalla seguente tabellina (1):

	Prezzi nel periodo 1871-1874 (lire)	Prezzi nel periodo 1882-1885 (lire)
Frumento (per ql.)	36.16	23.58
Granoturco di 1ª qualità (per ql.) .	24.77	17.10
Olio di oliva (1879)	160	120 (1886)
Agrumi (1 ql.)	27 (1879)	20

A sua volta il numero delle persone occupate nella agricoltura, che secondo il censimento del 1871 era di 8.8 milioni, sarebbe disceso, secondo il censimento dal 1881, a 8.5 milioni.

In ogni modo la produzione agricola di questo periodo non ha contribuito per nulla ad aumentare, ma ha anzi recato una diminuzione, nel complessivo reddito della Nazione, diminuzione che però è stata vantaggiosamente compensata da altri elementi, come passiamo a dimostrare.

3. — Il reddito imponibile a carico dei proprietari di fabbricati ha presentato le seguenti variazioni (2):

Anni	milioni di lire	Anni	milioni di lire
1876	334.3	1885	401.9
1880	385.7	1887	411.7

Abbiamo lasciata nel 1876 l'importazione di carbon fossile a circa 1 milione e mezzo di tonnellate, nel 1887 essa aveva superato i 3 milioni e mezzo di tonnellate.

Nello stesso intervallo l'importazione del cotone greggio passava da 186.000 quintali nel 1875 a 762.000 quintali nel 1887 (3).

(1) Sensini G., *op. cit.*, pagg. 81, 82, 133 e 137.
(2) *Annuario statistico italiano* pel 1892, pag. 816.
(3) Sensini G., *op. cit.*, pagg. 94 e 115.

Il numero delle persone addette all'industria è passato da 3-4 milioni nel 1871 a 4.1 milioni nel 1881, e quello delle persone occupate nel commercio è aumentato da 534.485 a 743.878.

Il tonnellaggio complessivo delle navi a vela ed a vapore ha presentate le seguenti variazioni:

	1876 (tonnellate)	1887 (tonnellate)
Navi a vela.	1.020.488	732.494
Navi a vapore	57.341	163.131
Totale . .	1.077.799	895.625

4. — Il numero delle ore di lavoro necessarie per acquistare 1 ql. di frumento, che nel 1876 era stato di 148, discese gradatamente a 93 tanto per l'anno 1886 quanto per l'anno 1887 (1).

5. — Nello stesso intervallo il capitale del debito pubblico, non redimibile e redimibile aumentava da 10.141 milioni nel 1876 a 11.240 milioni nel 1887, e gli interessi riscossi dai titolari aumentavano corrispondentemente da 482.4 milioni a 524.8 milioni di lire.

6. — Nel 1876 l'emigrazione temporanea era stata, come dicemmo, di 89.015 persone e quella permanente di sole 18.756 persone (2). Nel 1887, se l'emigrazione temporanea era discesa a 87.917 persone, quella permanente era invece già salita a 117.748 persone, complessivamente a 215.665 persone. Tenuto conto degli emigranti negli anni precedenti, le loro rimesse cominciano ad acquistare importanza come elemento del reddito della Nazione. Tenendo conto della stazionarietà, o addirittura del lieve regresso dell'agricoltura, che risulta in questo periodo, compensato però vantaggiosamente dall'incremento di tutti gli altri elementi del reddito nazionale, crediamo di poter elevare a 11-12 miliardi quel reddito di 9.7-10.3 miliardi che si otterrebbe dal dato del patrimonio. Se questa valutazione è, come ne siamo convinti, esatta, il rapporto fra le contribuzioni che in questo periodo ammontavano a 1524 milioni, e reddito, sarebbe stato del 13.85-12.70 per cento, ed in media del 13.27 %.

(1) Sensini G., *op. cit.*, pag. 113.

(2) *Annuario statistico italiano pel 1882* pag. 89 Cfr. anche Coletti Fr., *Dell'emigrazione italiana* in « Cinquanta anni di storia italiana », op cit., Vol. II.

Capitolo VII.

Variazioni del patrimonio e del reddito dal 1888 al 1892.

1. — In relazione al terzo periodo della nostra finanza, e precisamente a quello che è stato detto il *periodo* di *decadenza* (1888/1892), presentiamo le seguenti cifre che indicano il valore del patrimonio dei privati, calcolato col consueto metodo dell'intervallo devolutivo.

Anni	Successioni (milioni di lire)	Passaggi di usufrutto (milioni di lire)	Donazioni (milioni di lire)	Totale (milioni di lire)	Totale aumentato di metà (milioni di lire)	Totale aumentato di 1/2 × 32	Media del quinquennio (in miliardi di lire)
1888/89	979.0	29.8	164.3	1173.1	1759.6	57.307	
1889/90	1003.8	29.9	162.4	1196.1	1794.1	57.411	
1890/91	1021.0	22.9	161.9	1205.8	1808.7	57.878	57.6
1891/92	1015.9	29.9	163.9	1209.7	1811.5	57.960	
1892/93	1010.8	30.3	163.1	1204.2	1806.3	57.801	

Valutando, come al solito, il reddito al 17-18 per cento del patrimonio, si ottiene per il quinquennio 1888/1889-1892/1893 un reddito di 9.7-10.3 miliardi di lire, e cioè un reddito eguale a quello del sessennio 1882-1887.

Indichiamo brevemente le variazioni dei vari elementi che compongono il reddito nazionale.

2. — La stessa condizione, sostanzialmente stazionaria si osserva intanto per la produzione delle principali derrate agricole, come risulta dalla seguente tabella.

	Periodo 1882-1886	Periodo 1887-1891
Frumento (milioni di ettol.)	45.0	43.5
Granoturco » »	29.3	27.1
Riso » »	8	6.9
Vino » »	27.6	28.9 (1892-93)
Olio » »	1.9	2.4 (1892-93)
Agrumi (milioni di frutti)	3.3	3.3
Bozzoli (milioni di kg.)	36.7	41.4 (1892-93)

Anche i prezzi dei sotto segnati prodotti agricoli si mantengono piuttosto stazionari (1).

	1882 85 (lire)	1891-92 (lire)
Frumento (ql.)	23.58	24.46
Granoturco di 1 qualità (ql.)	17.10	16.80
Olio di olivo (per ql.)	120.—	111.—
Agrumi (per ql.)	20.—	18.—

Non è possibile indicare il numero delle persone che nel 1891 erano occupate nell'agricoltura, e così pure quello delle persone occupate nelle industrie, nei commerci, nelle professioni e negli impieghi, perchè nel 1891 non è stato fatto il censimento.

Nello stesso periodo il reddito imponibile dei fabbricati aumentava gradatamente da 416.6 milioni nel 1888 a 516.5 milioni nel 1892 (2).

3. — L'importazione di carbon fossile, che nel 1887 era stata di 3.8 milioni di tonnellate si mantiene essa pure stazionaria per tutto il quinquennio considerato (1882-1892).

L'importazione del cotone in bioccoli che, nel 1887 era stata di 762.000 ql. aumenta a poco più di 1 milione di ql. nel 1890 3).

Il tonnellaggio complessivo delle navi a vapore ed a vela che nel 1887 era stato di 895.625 tonnellate discese nel 1892 a tonnellate 811.264.

(1) Sensini G., *op. cit.*, pagg. 81, 82, 133 e 137.
(2) *Annuario statistico pel 1892* pag. 816.
(3) Sensini G., *op. cit.*, pagg. 94 e 114.

4. — Il valore delle importazioni (commercio speciale) che nel 1887 era stato di 1604 milioni discese a 1173 milioni nel 1892; e quello delle esportazioni discese da 1002 milioni nel 1887, a 958 milioni nel 1892, certamente in conseguenza della tariffa approvata con la legge 14 luglio 1887, che segnò, sebbene in misura diversa, il completo trionfo del protezionismo agrario ed industriale.

Analogamente dal 1887 al 1892 il numero delle Società ordinarie di credito discese da 158, con un capitale sottoscritto di 390 milioni, a 144, con un capitale sottoscritto di 292 milioni di lire.

5. — Il reddito imponibile accertato nelle categorie B, C e D dell'imposta di R. M., *riscossa mediante ruoli*, è stato quale risulta dalle seguenti cifre:

	1876	1887	1892
Categoria B	310	320	350
Categoria C	99	90	112
Categoria D	25	36	44

6. — Nello stesso periodo il numero delle ore necessarie per acquistare un ql. di frumento, che negli anni 1886 e 1887 era stato di 93, cresce a 99 (1).

Nel medesimo intervallo gli interessi riscossi dai possessori di titoli del debito pubblico, redimibile e non redimibile, sono saliti da 524.8 milioni nel 1886 a 573.2 milioni nel 1892, ai quali si devono aggiungere altri 13 milioni riscossi dai possessori dei Buoni del Tesoro.

7. — Il numero degli emigrati presentò le variazioni seguenti:

	1887	1892
Emigrazione temporanea . . .	87.917	116.298
Emigrazione permanente . . .	127.748	107.369
Totale . .	215.665	223.667

Nel suo complesso anche l'emigrazione si può dire stazionaria, e

(1) Sensini G., *op. cit.*, pag. 133.

quindi per quanto riguarda le rimesse degli emigrati deve essere ripetuto quanto si è accennato a proposito del periodo precedente.

Nell'insieme al periodo di decadenza finanziaria corrisponde un periodo se non di decadenza, certo di stazionarietà economica, anzi è la stazionarietà economica che in questo periodo determina la decadenza finanziaria.

Nella verosimile ipotesi che il reddito nazionale sia rimasto stazionario intorno ai 12 miliardi di lire, già calcolati per il periodo precedente, poichè le contribuzioni nell'esercizio 1892/93 sono state di 1610.7 milioni, il rapporto fra esse e il reddito nazionale è stato del 13.43 per cento.

Capitolo VIII.

1. — In relazione al quarto periodo della nostra finanza, a quello cioè che è stato chiamato il *periodo della ricostruzione* (1893-1898), si presentano le seguenti cifre che indicano il valore del patrimonio dei privati calcolato col solito metodo dell'intervallo devolutivo:

Esercizi	Successioni (milioni di lire)	Passaggi di usufrutto (milioni di lire)	Donazioni (milioni di lire)	Totale (milioni di lire)	Totale aumentato di 1/2 (milioni di lire)	Totale aumentato di 1/2 × 32 (miliardi di lire)	Media del quinquennio (miliardi di lire)
1893/94	1.072.773	26.7	166.1	1275.7	1913.5	61.232	
1894/95	988.548	30.8	172.7	1192.1	1778.1	56.899	
1895/96	950.297	24.7	164.7	1139.8	1709.6	54.697	56.1
1896/97	946.262	34.2	161.0	1141.5	1712.2	54.790	
1897/98	912.840	32.3	162.3	1107.5	1661.2	53.158	

Valutando, come al solito, il reddito al 17-18 per cento del patrimonio si ottiene per il quinquennio 1893-1894, 1897-1898 un reddito di 9.5-10 miliardi di lire, in confronto ai 9.7-10.3 miliardi valutati pel quinquennio precedente, e cioè una condizione economica lievemente regressiva.

2. — La produzione delle principali derrate agricole presenta una condizione sostanzialmente stazionaria, come si scorge dalla seguente tabella:

	Periodo 1887-91	Periodo 1896 98
Frumento (milioni di ettolitri) . .	43.5	43.4
Granoturco » » . .	27.1	26.4
Riso » » . .	6.9	5.4
Vino » » . .	28.9 (1892-93)	29.9
Olio di oliva » » . .	2.4 (1892-93)	2.1
Agrumi (milioni di frutti) . . .	3.3	3.4
Bozzoli (milioni di kg.) . . .	41.4 (1892-93)	39.1

Anche i prezzi delle derrate sopra indicate, a prescindere da inevitabili, minute oscillazioni, si presentano in complesso stazionari (1):

	1891-92 (lire)	1896-98 (lire)
Frumento (al ql.).	24.46	25.15
Granoturco (al ql.)	16.80	19.50
Riso (al ql. all'esportazione) . .	26.50	34.80
Vino (all'ettolitro)	27.50	28.60
Olio di olivo (al ql.)	111.—	104.—
Agrumi (ql.).	18.—	12.—
Bozzoli (ql. all'esportazione). . .	1200.—	968.—

3. — Per quanto riguarda i fabbricati, il loro reddito imponibile aumentava da 516.5 milioni nel 1892 a 547.2 nel 1899.

4. — L'importazione di carbon fossile che nel 1892 era stata di 3.8 milioni di tonnellate aumenta gradatamente sino a 4.4 milioni di tonnellate nel 1898 (2). Ma a partire dal 1890, o poco prima, è necessario tener conto anche del consumo dell'energia elettrica, adibita in buona parte a scopi industriali, sebbene la produzione di questa ultima appaia già in parte — sia pure gradatamente decrescente — nella quantità del combustibile consumato. Del consumo della energia elettrica si hanno dati esatti soltanto a partire dal 1 novem-

(1) Sensini G., *op. cit.* pagg. 81, 82, 133 e 137 e *Annuario statistico* per l'anno 1900. pag. 536 e segg.

(2) Sensini G., *op. cit.*, pag. 94.

bre 1895, giorno in cui anche la produzione dell'energia elettrica fu soggetta a vigilanza fiscale. Da questo giorno al 30 giugno 1896 si consumarono 102.462 migliaia di ettowat-ora. Negli anni finanziari successivi tale consumo crebbe sino a raggiungere 219.308 migliaia di etto-watt ora nell'esercizio 1898-99 (1).

L'importazione del cotone aumenta da 1017 migliaia di quintali nel 1890 a 1328 migliaia di quintali nel 1899.

Il tonnellaggio netto complessivo delle navi a vela ad a vapore ha presentato le seguenti modeste variazioni:

	1892	1898
Navi a vela.	609.821	537.642
Navi a vapore	201.442	277.520
Totale . . .	811.264	815.162

Il valore delle merci importate ed esportate presentò invece i sensibili aumenti indicati dal seguente specchietto:

	1892 (milioni di lire)	1898 (milioni di lire)
Importazioni (merci)	1173	1506
Esportazioni (merci)	958	1203

5. — Il reddito imponibile accertato nelle categ. B, C e D dell'imposta di R. M. *riscossa mediante ruoli* presentò le diminuzioni sotto indicate:

	1892 (milioni di lire)	1898 (milioni di lire)
Categ. B	350	255
Categ. C	112	91
Categ. D	91	36

6. — È utile anche tener presente che al 1 luglio 1898 il personale civile e militare in servizio dello Stato con stipendio soggetto *a ri-*

(1) Sensini G., *op. cit.*, pagg. 97, 98.

tenuta per la pensione era di 73.222 persone, che ricevevano uno stipendio complessivo di 146 milioni, e cioè in media lire 1994 a testa (1).

7. — I possessori di titoli del debito pubblico, redimibile e non redimibile e di Buoni del Tesoro, che nel 1892 avevano complessivamente riscosso 586.2 milioni di lire di interessi, nel 1898 ne riscossero 589.7.

8. — Nello stesso periodo il numero delle ore di lavoro necessario per acquistare un quintale di frumento, che negli anni 1886 e 1887 era stato in media di 99, cresce a ore 103 $^1/_2$ (2).

9. — Il numero degli emigranti presentò il seguente aumento, che certamente deve aver portato un corrispondente aumento delle rimesse degli emigranti stessi.

	1892	1898
Emigrazione temporanea . . .	116.298	147.803
Emigrazione permanente . . .	107.369	135.912
Totale . .	223.667	283.715

I dati surriferiti rendono plausibile l'opinione che nel periodo ora considerato non vi sia stata quella diminuzione, sia pure minima, del reddito nazionale, che verrebbe indicata dai valori trasmessi per successioni e donazioni — i quali esprimono piuttosto la situazione di un passato prossimo che quella del presente — ma un modesto aumento del reddito stesso, quale risulta dalle cifre relative all'industria e al commercio, cosicchè riteniamo che il reddito nazionale dal 1892 al 1898 sia aumentato di circa un miliardo di lire, ed abbia così raggiunto i 13 miliardi.

E poichè le contribuzioni nell'anno 1898 sono state di 1713.3 milioni, il loro rapporto col reddito è stato ancora di circa il 13 per cento.

---

(1) *Annuario statistico italiano pel 1900*, pag. 983.

(2) Sensini G., *op. cit.*, pag. 193.

Capitolo IX.

Incremento del patrimonio e del reddito dal 1898 al 1914.

In relazione al quinto periodo della nostra finanza, a quello cioè che può dirsi il periodo prebellico (1898-1914) si riportano le cifre seguenti (1) che indicano il valore del patrimonio dei privati calcolato col metodo dell'intervallo devolutivo (2).

Esercizi	Successioni (in milioni di lire)	Passaggi di usufrutto (in milioni di lire)	Donazioni (in milioni di lire)	Totale (in milioni di lire)	Totale aumentato di 1/2 (in milioni di lire)	Totale aumentato di 1/2 × 32 (in miliardi di lire)	Media del quinquennio (in miliardi di lire)
1898/99	932.1	33.7	162.5	1128.4	1692.6	54.1	
1899/900	936.6	32.4	173.4	1142 6	1713.9	54.8	
1900/901	1050.5	25.0	170.7	1246 2	1869.3	59.8	56.7
1901/902	1001.5	30	153.4	1184.9	1777.3	56.8	
1902/903	1023.6	30.0 (*)	158.1	1211.7	1817.5	58.1	
1906/07 1909/10 (**)	104.9	30.0 (*)	182.9	1254.8	1892.2	10.2	Media del biennio
1912/13	1315.9	30.0 (*)	199.2	1545.1	2317.6	74.1	74.5
1913/14	1352.6	30.0 (*)	206.0	1561.6	2342.4	74.9	

(*) Valore presunto sulla base di quello dei precedenti passaggi di usufrutto. Il Bollettino surriferito non reca il prodotto dell'imposta sui passaggi di usufrutto dopo il 1900-01.

(**) Il *Bolletino di Statistica etc.* non ha pubblicato i valori delle successioni e delle donazioni per gli esercizi 1903/04 1911/11. Per il quadriennio 1906 07 1909/10 riportiamo questi valori dallo studio più volte citato del prof. Savorgnan, che ha potuto trascriverli per concessione della Amministrazione delle tasse sugli affari (Cfr: La ripartizione ragionale ricchezza privata op. cit.), ma che ha pubblicato soltanto i valori medi quadriennali.

Per gli anni 1912-1914 il patrimonio valutato col metodo dell'intervallo devolutivo risultava quindi di 74.5 miliardi.

Ma il patrimonio calcolato col suddetto metodo esprime un valore che nel decorso del tempo tanto più divergeva dalla realtà quanto più cresceva il saggio delle imposte sulle successioni, e la percen-

(1) Cfr. *Bollettino di Statistica e di Legislazione comparata.* Anno IV. fasc. III pagg. 649, 656. 657 e 702. Anno XIV fasc,. V. pagg. 617, 618.

(2) Vedi nota 1 a pag. 159.

tuale dei beni mobili — più facilmente occultabili — nel complesso dei beni componenti le successioni e le donazioni (1). Inoltre il valore delle successioni esprime evidentemente, come abbiamo già osservato, piuttosto la condizione economica di un passato prossimo che quella del presente.

Per questi motivi alla stima del patrimonio condotta col metodo dell'intervallo devolutivo, è utile, necessario anzi, sostituire per questo periodo la stima del patrimonio ottenuto con altri metodi e cioè con quelli dell'*inventario reale* e della *capitalizzazione dei redditi.* Con l'uso di questi metodi GINI otteneva i risultati seguenti: (2)

	in miliardi di lire
Terreni e fabbricati rurali	45.0
Cave, miniere, torbiere e peschiere	1.0
Fabbricati rurali	20.0
Bestiame	5.0
Moneta	1.4
Depositi e risparmi, depositi garantiti e conti correnti	7.1
Debito consolidato ed altri titoli garantiti dallo Stato	6.4
Titoli certificati, azioni ed obbligazioni . . .	6.6
Mobilia	11.5
Altri beni mobili	10.
Totale . .	114.

È necessario dedurre dalle surriferite categorie di capitali il valore dei titoli non compensati da crediti afferenti a privati, titoli che nel 1914 si potevano calcolare in circa 3 miliardi di lire. Ciò avrebbe lasciato circa 111 miliardi di lire come patrimonio dei privati immediatamente prima della guerra. Aggiungendo il patrimonio degli Italiani che abitavano i territori che prima della guerra appartenevano all'Austria, ma che dopo la guerra furono riuniti all'Italia, otteniamo altri 4 miliardi di lire, o poco più, il che porta il totale della ricchezza in Italia prima della guerra a circa 115 miliardi di lire.

(1) SAVORGNAN FR., *La ripartizione territoriale della ricchezza in Italia.* In «Metron», Vol. I n. 3 (1. IV. 1921).

(2) GINI C., *A comparison of the wealth and national income of several important Nations,* pag. 2 Roma. Provveditorato dello Stato 1925.

È vero che poco prima dello scoppio della guerra europea si era calcolato che la ricchezza italiana si aggirasse sugli 80 miliardi, o per dire più esattamente fra gli 80 e gli 85 miliardi, ma tale valutazione era riferita al 1908, e forse doveva riferirsi ad una data di qualche poco anteriore.

Per il 1914, calcoli analoghi non si poterono eseguire che nel 1918, e diedero, come si è sopra rilevato, non più 80-85, ma circa 110 miliardi, un notevole pregresso dovuto in gran parte ad una vera accumulazione di ricchezza, in parte minore ad un rialzo del livello dei prezzi (1).

Secondo stime di altri autori, in gran parte però derivanti da quella sopra citate al Gini, la ricchezza privata italiana poteva valutarsi, intorno al 1912, a 92-93 miliardi secondo il prof. Flora e secondo il Dott. Benedetti, a 93 miliardi secondo Gabrielli-Idisemann e a 95 miliardi secondo il Dott. G. Dettori (1).

Le valutazioni precedenti a quelle del Gini erano quella mia del 1900 in 62 miliardi, quella del Nitti sul 1904 in 65 miliardi, del Coletti per il 1900-1905 in 47 miliardi e mezzo, e finalmente quella del Principalle per il 1908 in 61-65 miliardi.

Interessa ancora osservare che il patrimonio degli enti pubblici (Provincie e Comuni, istituzioni pubbliche di beneficenza, istituti di emissione, casse di risparmio, società di mutuo soccorso, parrocchie, società per azioni) era nel 1914 di 16.9-17 miliardi, e cioè il 13 % della ricchezza totale, stimata a 126-127 miliardi (1).

Per il 1914 il reddito prebellico degli Italiani poteva essere considerato di circa 20 miliardi di lire, stima alla quale si perveniva con vari metodi (2).

In primo luogo sulla solita base della percentuale del patrimonio nazionale, come sopra calcolato, rappresentata dal reddito. Se noi applichiamo la consueta percentuale del 17-18 per cento alla ricchezza prebellica delle vecchie provincie otteniamo un reddito di 18.9-20 miliardi di lire.

Un altro metodo è basato sul consumo di generi alimentari da parte della popolazione italiana, che prima della guerra si poteva calcolare di circa 10 miliardi di lire. L'esame dei bilanci alimentari prima della guerra, conduceva alla conclusione che l'alimentazione rappresentava circa il 60 % della spesa totale delle famiglie. Questa

---

(1) Gini G., *Problemi sociologici della guerra*. Zanichelli, Bologna. 1921, pp. 360, 363 e 256.

(2) Gini C., *A comparison of the wealth, op. cit.*, pagg. 3 e 4.

considerazione avrebbe portato il consumo totale di ogni specie di beni della popolazione italiana a circa 17 miliardi di lire. A ciò si deve aggiungere l'importo delle varie specie di risparmio, che può essere calcolato da 2.2 a 2.5 miliardi di lire.

Il reddito degli italiani delle vecchie provincie sarebbe stato così di 19.5 miliardi di lire, o poco meno, e questa cifra può essere aumentata di circa il 4 per cento se vogliamo prendere in considerazione gli abitanti delle provincie annesse dopo la guerra, arrivando così ad un reddito prebellico, per l'Italia di oggi di circa 20 miliardi.

Un terzo metodo per giungere alla valutazione del reddito consiste nell'accertare il valore dei prodotti e dei servizi resi dalle varie categorie professionali della popolazione italiana.

Escludendo, come si usa di fare, da questo accertamento il valore dei servizi domestici resi gratuitamente dalle persone appartenenti alla famiglia, il GINI (1) ha ottenuto i risultati seguenti:

	(miliardi di lire)
Agricoltura, pastorizia, caccia e pesca . . .	7.—
Industria	6.—
Commercio e banche.	2.—
Impiegati pubblici e privati e servizi personali .	2.—
Reddito dei fabbricati urbani	1.—
Interessi del debito pubblico	0 5
Rimesse degli emigranti	0.5
Totale.	19

Anche questo metodo dà un totale di 19 miliardi, che può essere portato a 20 per tener conto del reddito degli abitanti delle provincie annesse dopo la guerra.

* * *

Tutte le cifre indicanti le quantità ed i valori dei vari elementi che compongono il reddito nazionale confermano che nel periodo considerato (1898-1914) l'aumento del reddito è stato veramente considerevole ed approssimativamente eguale — se non superiore a quello in precedenza calcolato.

(1) GINI C., *A comparison of the wealth* etc., op. cit., pag. 19.

1. — Per quanto concerne la produzione delle principali derrate agricole, esse con eccezione del riso e dell'olio, presentano un ragguardevole aumento; si può anzi affermare che l'agricoltura italiana che, dopo i progressi fatti nel periodo del 1861 al 1870-74 si trovava in condizione stazionaria, prese nuovo e vigoroso impulso a partire dal decennio 1900/1910 (1).

Tale progresso risulta evidente dalla seguente tabella:

	Periodo 1896 98	Periodo 1912-14
Frumento (milioni di ql.) . . .	33.7	49.8
Granoturco » » . . .	29 0	26.3
Riso » » . . .	5.5	3.0
Vino » di hl. . . .	29.9	46.4
Olio di oliva » » . . .	2.9	1.4
Agrumi » di ql. . . .	4.2	7.7 (1910-14)
Bozzoli » di kg. . . .	391.0	403.6 (1910-14)

Si noti ancora che la coltivazione delle bietole da zucchero, che si affermò possibile e conveniente solo dopo le prove culturali fatte iniziare dal Miraglia nel 1871, e che alimentò la vera, grande industria dello zucchero soltanto nel 1897-1898, nel periodo 1910/14 diede già la ragguardevole produzione di 18.7 milioni di quintali.

Anche i prezzi fra l'uno e l'altro estremo del periodo ora considerato presentano un sensibile aumento, come risulta dallo specchietto seguente:

	Periodo 1896 98 (lire)	Periodo 1912-14 (lire)
Frumento (ql.)	25.15	29.48
Granoturco (ql.)	19.50	23.70
Riso (ql.)	34.8	35.28
Vino (hl.)	28.6	29.94
Olio di oliva (ql. all'esport.) . .	104.—	162.—
Agrumi (ql. all'esportazione) . .	12.—	22.—
Bozzoli » » . .	968.—	1100.—

(1) Valenti G., *L'Italia agricola*. In «Cinquanta anni di vita Italiana», op. cit. Vol. I°.

Anche il bestiame e specialmente quello bovino presentava un notevole aumento come risulta dalla seguente tabella:

	Censimento del 1890 (000)	Risultati di una valutazione per il 1914 (*) (000)
equini	2020	2235
bovini	5000	6646
ovini e caprini	10612	13824
suini	1163	2722

(*) *Annuario statistico* pel 1915 pag. 134.

Ricordiamo infine che l'Ufficio di Statistica Agraria calcolava nel 1910, in via largamente approssimativa, il valore lordo dei prodotti dell'agricoltura italiana in circa 7 miliardi di lire.

2. — Il reddito imponibile dei fabbricati urbani inscritto nei ruoli presentava le seguenti variazioni:

1899 (milioni di lire)	1914 (milioni di lire)
547.2	708.6

con un aumento di 161.4 milioni, ossia del 29 per cento.

3. — Il grande sviluppo presentato dall'industria in questo periodo può essere indicato con le seguenti cifre relative all'importazione del carbon fossile, al consumo della energia elettrica e all'importazione del cotone in bioccoli.

	1898	1914
Importazione del carbon fossile (milioni di tonnellate)	4.4	9.7
Consumo dell'energia elettrica (migliaia di etto-watt ora)	219.308	21.151.616
Importazione del cotone (migliaia di quintali	1328	1.906

Il numero delle persone da dieci anni in su occupate nell'industria e nei commerci ha presentato il seguente aumento:

	1901 (000)	1911 (000)
Persone occupate nell'industria . .	3.874	4.502
Persone occupate nel commercio. .	1.189	1.330

Il tonnellaggio complessivo netto delle navi a vela ed a vapore ha presentato le seguenti variazioni, che indicano un progresso quantativo e qualitativo.

	1898 (tonnellate nette)	1914 (tonnellate nette)
Navi a vela.	537.642	348.959
Navi a vapore	277.520	933.156
Totale . .	815.162	1.282.115

4. — Il valore delle merci importate ed esportate presentò il notevole aumento indicato dalle cifre seguenti, che però dimostrano anche che al prevalere delle esportazioni sulle importazioni subentrava quello delle importazioni.

	1898	1914
Importazione delle merci in milioni di lire . .	1506	3058
Esportazione delle merci » » » » . .	1203	2342

Analogamente il numero delle società ordinarie di credito che nel 1898 era di 158 con un capitale versato di 162.8 milioni aumentò al dicembre 1912 a 192 con un capitale versato e nelle riserve di 646.9 milioni.

5. — Il reddito imponibile accertato nelle categ. B, C e D della imposta di R. M. *riscossa mediante ruoli* presentò gli aumenti seguenti:

	1898 (milioni di lire)	1914 (milioni di lire)
Categ. B	255	503.5
Categ. C	91	175.3
Categ. D	36	91.5

6. — I possessori di titoli del debito pubblico, redimibile e non redimibile, e di buoni del tesoro, che nel 1898 avevano riscosso com-

plessivamente 589.7 milioni di lire a titolo d'interessi, nel 1914 riscossero, per effetto principalmente della conversione della rendita effettuata nel 1906, soltanto 537.1 milioni di lire, delle quali 428.8 milioni furono pagate nel Regno e 94,8 (ossia il 18.20 per cento) furono pagate all'estero.

7. — Nello stesso periodo, il numero degli emigranti dopo aver toccato un massimo di 872.598 (dei quali 559.566 per paesi transoceanici), nel 1914 raggiunse un totale di 479.041 così distinti:

	1898	1914
Emigrazione temporanea . .	147.803	245.897
Emigrazione permanente . .	135.912	233.144
Totale . .	283.715	479.041

Per quanto concerne l'importo delle rimesse degli emigrati, il prof. Coletti (1) le calcolava pel 1907 in 85 milioni di lire per le rimesse degli emigrati in Europa e nei paesi del bacino del Mediterraneo, e in 465 milioni per quelle degli emigrati transoceanici, in totale di 550 milioni di lire.

8. — A partire dal 1899 la Direzione Generale della statistica ha cessato di calcolare il numero delle ore di lavoro necessarie per acquistare un quintale di frumento per gli operai di sette grandi opifici dell'Italia settentrionale e della Liguria. Sostituiamo perciò a questo indice della condizione delle classi operaie, quello relativo alle disponibilità per il consumo di alcune importanti derrate, tenuto conto della produzione interna e del movimento del commercio con l'estero.

(1) Coletti Fr., *Dell'emigrazione italiana*, in « Cinquanta anni di Storia Italiana », op. cit., Vol. III pag. 242.

	1884/98 media annua per abitante	1914 media annua per abitante
Frumento. Kg.	120.—	164.—
Granoturco »	66.—	82.—
Vino, — litri	91.—	127.—
Olio di oliva. Kg. . . .	5.5	3.83
Zucchero (1891/99). Kg. . .	2.33	4.58
Caffè (1891/99). Kg. . . .	0.420	0.760
Alcool (1883/86) litri . . .	1.—	0.580
Birra (1887/99) litri . . .	0.750	2.040
Sale commestibile (1898/99). Kg.	7.310	5.885
Tabacco (1898/99). Kg. . . .	0.562	0.546

Le variazioni delle quantità disponibili dei principali generi alimentari, frumento, granoturco, zucchero caffè e vino, sono sensibilmente eulogiche, la diminuzione della quantità disponibile dell'olio di oliva è probabilmente dovuta al maggior consumo del burro, e le piccole diminuzioni riscontrate nel consumo del sale e del tabacco non sono certamente tali da elidere quella confortante impressione di sensibile progresso nell'alimentazione della popolazione italiana nel periodo considerato che risulta dalle rilevazioni surriferite.

Capitolo X.

Stazionarietà del patrimonio e del reddito dei privati fra i due estremi del periodo 1914-1924/25.

Dopo l'esercizio 1913/14 non sono stati ancora pubblicati i valori accertati agli effetti delle imposte sulle successioni e sulle donazioni; se fossero stati pubblicati li riporteremmo qui e procederemmo alla valutazione del patrimonio dei privati in questo periodo col solito metodo dell'intervallo devolutivo, perchè questa stima fornisce un punto di riferimento ed un elemento di controllo per i risultati che si ottengono con l'uso degli altri metodi, ma, per i motivi già indicati a pag. 187, se anche possedessimo i valori delle successioni e delle donazioni dopo l'esercizio 1913/14, alla stima del patrimonio condotta col metodo dell'intervallo devolutivo preferiremmo egualmente quella ottenuta con l'uso di metodi più penetranti. Servendosi appunto di

questi metodi, il GINI(1) presentava pel 1924/1925 la seguente valutazione del patrimonio dei privati per le vecchie provincie del Regno:

	Miliardi di lire
Terreni e fabbricati rurali	200
Cave, miniere torbiere e peschiere	5
Fabbricati urbani	90
Bestiame	35
Moneta	7
Depositi a risparmio, a cauzione, e in conto corrente presso le Banche	18
Titoli del debito consolidato e degli altri debiti dello Stato	45
Cartelle, certificati, azioni, obbligazioni. . . .	40
Mobilia	55
Altri beni mobili	45
	540

Deducendo i titoli non compensati da corrispondenti crediti afferenti a privati, titoli che si possono stimare in 10 miliardi di lire, si ha un totale di 530 miliardi, che con valutazione largamente approssimativa, si devono portare a 550 miliardi per tener conto del patrimonio dei privati delle provincie annesse.

Questa volta crediamo di non poter desumere il reddito nazionale dal patrimonio, perchè se prima della guerra il calcolo del patrimonio era più facile di quello del reddito, nel periodo postbellico è invece più facile — come osserva il GINI — il calcolo del reddito che quello del patrimonio, la stima del patrimonio essendo ostacolata da serie difficoltà, sotto un certo aspetto eguali a quella che si presenterebbe a chi volesse pesare dei corpi mentre sono in moto.

Per accertare il reddito dei privati rendiamoci anzi tutto conto delle variazioni che i principali elementi i quali formano questo reddito hanno presentato fra il 1913-14 e il 1924-25.

1. — Per quanto concerne l'agricoltura la seguente tabella (2) mostra le variazioni che hanno avuto luogo nel periodo considerato

(1) GINI C., *A comparison of the wealth and national income.* op· cit., pag. 6.

(2) Cfr. « *Notizie periodiche di statistica agraria* » dal giugno 1925 in poi.

nella produzione delle principali derrate:

	Periodo 1912-14	1923 25 Vecchio Regno	1923 1925 Nuove Provincie	Nuovo Regno
Frumento (milioni di ql.) . .	49.8	57.2	0.46	57.66
Granoturco » » . .	26.3	24.6	0.90	25 50
Riso » » . .	3.0	5.8	—	5.80
Agrumi » » . .	7.7	6.2	—	6.20
Bozzoli » » . .	4.036	4.063	0.0168	4.231
Barbabietole da zucchero . .	18.7	26.6	—	26.600
Olio di oliva (milioni di hl) .	1.4	1.83	0.024	1.854
Vino » » . .	46.4	46.7	1.2	47.900

I prezzi presentano una sensibile e generale tendenza alla diminuzione se indicati in lire prebelliche (1), come devono essere indicati perchè sia corretto il loro confronto con quelli precedenti la guerra. Per un di più indichiamo i prezzi stessi anche in lire oro (2), non senza osservare che noi abbiamo fatto la media dei prezzi in lire-carta del triennio 1923-1925, ma che nel triennio stesso la tendenza costante e generale dei prezzi è stata, di anno, in anno, all'aumento. In ogni modo se espressi in lire-oro i prezzi presentano invece quasi tutti un aumento.

	1912-14 (3)	1923 25 prezzi in lire-carta	1923 25 prezzi in lire prebelliche	1923-25 prezzi in lire-oro
Frumento (media dei prezzi del grano tenero e di quello duro)	29.48	139.9	22.85	31.58
Granoturco per ql. . . .	23.70	105.0	17.93	23.03
Riso » » . . .	35.28	210.0	34.09	47.70
Vino comune per ettolitro. .	29.94	122.6	19.90	27.67
Olio di oliva » . .	162.00	550.0	89.28	120.41
Agrumi (all'esportazione per ql.)	22.00	104.0	16.88	23.77
Bozzoli » » » » .	1100.00	6546.0	1062.00	1476.00

(1) Media dei numeri indici dei prezzi all'ingrosso (Bachi) nel triennio 1923, 1924, 1925=616

(2) Prezzo medio di 100 lire-oro nel triennio 1923, 1924, 1925=443.24.

(3) « Notizie periodiche di statistica agraria » fasc. maggio e luglio 1926.

2. — Il reddito imponibile dei fabbricati urbani, che nel 1914 era stato accertato in 708.6 milioni di lire, aumentava nel 1923 a soli 800 milioni.

Ma questa cifra è poco significativa, sia per l'epoca remota cui risaliva l'ultimo censimento del reddito imponibile (1850), che già prima della guerra era lontano dal riflettere il reddito reale. Inoltre molte nuove costruzioni, ed un numero non minore di ampliamenti di costruzioni vecchie non erano ancora censiti, per il ritardo, spesso molto lungo, dei rilievi catastali; vi sono poi le esenzioni decennali ed ora trentennali che sottraggono un ragguardevole complesso di fabbricati all'accertamento catastale (1).

La rivalutazione del reddito dei fabbricati, ordinata dal Ministro de' Stefani nel 1924, portava infatti pel 1925 il reddito imponibile dei soli fabbricati civili urbani (con esclusione di quello degli opifici industriali) a 2.878 milioni di lire.

3. — L'importazione di carbon fossile, che nel 1914 era stata di 9.7 milioni di tonnellate diminuì a 7.5-8.0 milioni di tonnellate rispettivamente pel 1924 e pel 1925. Per contro il consumo dell'energia elettrica che nel 1914 era stato di 2.151 milioni di chilo-watt-ora salì a ben 6.962 milioni nell'esercizio finanziario 1924-25.

L'importazione del cotone greggio che nel 1914 era stata di 1.9 milioni di quintali salì a 2 milioni di quintali nel 1924 ed a 2.4 milioni di quintali nel 1925.

Il tonnellaggio complessivo delle navi a vapore ad a vela ha presentato le seguenti variazioni.

	1914 (tonnellate nette)	1924 (tonnellate nette)
Navi a vapore . . .	933.156	1.635.950 (1923)
Navi a vela . . .	348 959	195.107
Totale . .	1.282.115	1.831.057

Il valore delle merci importate ed esportatate ha presentato le seguenti variazioni:

(1) Basso, *Il reddito totale degli Italiani*. In « Critica sociale » del 1-15 Dicembre 1923.

	1913 (in mil. di lire)	1923-25 (in mil. di lire-carta)	1923-25 (in mil. di lire prebelliche)	1923-25 (in mil. di lire-oro)
Importazione . .	3.058	20.916	3.395	4.721
Esportazione . .	2.342	14.227	2.309	3.211

Gli stipendi ed assegni dei 282.740 impiegati *di ruolo* dello Stato (civili, insegnanti, operai — esclusi i ferrovieri —), nel 1924 raggiungevano i 2783 milioni, con uno stipendio medio per impiegato di 9100 lire (1).

Secondo il censimento del 1921, le professioni legali, sanitarie, tecniche, artistiche annoveravano, solo per il sesso maschile, 161 mila persone (e cioè 51.773 medici e farmacisti, 37.545 avvocati e notai, 36.658 ingegneri e periti, 35.700 addetti alle belle arti). Anche senza ammettere nuovi aumenti, con le sole professioni non specificate, che contavano 25.173 persone, e con le nuove provincie, i professionisti devono ritenersi ora per lo meno 200.000. Calcolando una media di guadagno di 15.000 lire all'anno per persona, sono 3 miliardi di lire (2).

4. — I possessori di titoli del debito pubblico, redimibile e non redimibile, e di Buoni del Tesoro che nel 1914 avevano riscosso 537.1 milioni di interessi, nel 1923-24 ne riscossero 3968 milioni.

5. — L'emigrazione all'estero presentò la diminuzione indicata dalle seguenti cifre:

	1914	1924
Emigrazione temporanea . .	245.897	239.332
Emigrazione permanente . .	233.144	125.282
Totale . .	479.041	364.614

D'una parte sola delle rimesse si hanno statistiche, ma sfuggono tutte le somme che gli emigranti, specialmente temporanei, portano a casa personalmente e quelle che sono spedite a mezzo di banche private. Le rimesse per mezzo del Banco di Napoli e quelle che

(1) A. de' Stefani. *Documenti sulla condizione finanziaria ed economica dell'Italia.* Roma 1923.

(2) Basso L., op. cit. *Il reddito totale degli Italiani.*

risultano dai depositi nelle Casse postali furono nel 1920 di oltre 2 miliardi, poi diminuirono notevolmente, e quindi tenendo conto delle rimesse che non si possono controllare (1) è da ritenere che l'importo di tali rimesse sia forse ancora di 2 miliardi.

Il consumo medio individuale delle sotto indicate derrate, malgrado la guerra, in generale presenta tendenza piuttosto all'aumento che alla diminuzione, come risulta dalla seguente tabella, di cui la terza colonna è stata da noi formata, dividendo la produzione nazionale + importazione — esportazione per la popolazione del 1924.

	1914	1924
Frumento. Kg.	164.—	195.—
Granoturco »	82.—	68.—
Vino litri	127.—	113.—
Olio di oliva. Kg. . . .	3.83	3.06
Alcool »	0.580	0.558
Birra litri	2.04	2.67
Zucchero. Kg.	4.58	8.50
Caffè »	0.760	1.172
Sale commestibile. Kg. . .	5.885	7.300
Tabacco » . . .	0.546	0.690

Se dalla indicazione dei dati numerici sopra esposti vogliamo passare a risultati più precisi e conclusivi osserveremo col GINI (2) che un metodo per accertare il reddito dei privati di una nazione è basato sul consumo dei generi alimentari da parte di questa popolazione.

Siccome ora la spesa per l'alimentazione della popolazione italiana può essere calcolata in circa 63 miliardi di lire-carta, ed essa rappresenta una frazione considerevolmente più alta che nel periodo prebellico della spesa totale delle famiglie, frazione che possiamo ora considerare del 65 %, così giungiamo ad un totale di beni consumati di 97 miliardi di lire, ai quali possiamo forse aggiungere nelle presenti condizioni un risparmio di 7 od 8 miliardi. Ciò darebbe un reddito totale della popolazione italiana, incluse naturalmente le nuove provincie, di poco più di 100 miliardi di lire.

Ad analoghi risultati si giunge adottando il metodo della stima

(1) Vedi nota 2 pag. 198.

(2) GINI C., *A comparison of the wealth* ecc., op. cit. pag. 5.

dei beni prodotti e dei servizi resi dalle diverse categorie professionali, stima che fornisce i risultati seguenti:

	(in miliardi di lire-carta)
Agricoltura	32
Industria	36
Commercio e banche	11
Impieghi pubblici, privati e servizi personali	11
Reddito dei fabbricati urbani	4
Interessi del debito pubblico	4
Rimesse degli emigranti	2
Totale	100

Questa valutazione, se mai, può dare, a nostro parere, una stima lievemente inferiore a quella effettiva, specialmente per quanto si riferisce al reddito dell'agricoltura, che altri (1), con ottimismo forse un po' esagerato, ha calcolato in 50 miliardi di lire, ma che forse non è inferiore ai 40 miliardi di lire. In ogni modo la valutazione del GINI e gli elementi da noi forniti provano che la stima del Mortara (2) e di quegli altri studiosi, per cui il reddito dei privati negli stessi anni sarebbe stato di 90 miliardi di lire o anche meno, non è accettabile.

Confrontando ora il valore del patrimonio e del reddito nel 1914 e nel 1924 si hanno dunque le seguenti cifre.

	1914 (in lire)	Metà 1925 (in lire-carta)	Metà 1925 (in lire-oro) (3)
Patrimonio	111.—	550	119.—
Reddito	19-20	100	21.7

(1) BASSO L., *Il reddito totale degli Italiani*. op. cit.

(2) MORTARA G., *Prospettive economiche pel 1924*. Città di Castello.

(3) Le cifre surriferite danno l'impressione che vi sia stato un aumento di ricchezza. Questa impressione sarebbe sfortunatamente erronea, perchè l'incremento è solo apparente, essendo dovuto all'aumento dei prezzi dei beni materiali e dei servizi che è stato maggiore della svalutazione della carta-moneta di fronte all'oro, il quale, come è noto, ha perduto esso pure una notevole parte della sua potenza di acquisto in confronto del periodo pre-bellico.

Infatti nell'esercizio 1924/25 il prezzo di 100 lire-oro è stato di 460 lire-carta, ma il numero indice dei prezzi all'ingrosso per lo stesso periodo (quello costruito dal Prof. BACHI) fatto eguale a 100 il prezzo medio del 1913 è stato di 585, il che vuol dire che la potenza di acquisto della lira-oro nel 1924-25 è inferiore del 28

7. — Nel periodo 1914/15-1924/25 il valore della moneta legale ha subìto, come si è osservato nella nota precedente, una straordinaria diminuzione. Infatti, nell'esercizio 1924-25 il prezzo di 100 lire-carta, che prima della guerra era eguale a quello di 100 lire-oro, è stato di sole 21.74 lire-oro, e con 100 lire-carta si potevano acquistare tante merci all'ingrosso quante prima della guerra se ne potevano acquistare con lire 17.09.

Ma variazioni del valore della moneta, sebbene assai meno notevoli nella loro misura, avvennero anche in altri periodi dell'epoca da noi considerata.

Per quanto si riferisce a questi altri periodi, un vero numero-indice dei prezzi delle merci in Italia è soltanto quello costruito dal Dott. Achille Necco (1) per gli anni dal 1881 al 1909, e da lui stesso di anno in anno aggiornato sino al 1913 compreso (1), e dopo la sua

---

per cento a quella della lira-oro prebellica. E quindi se noi riduciamo le lire-carta del 1924/25 in lire-oro del 1913 otteniamo i risultati seguenti. Oltre le cifre assolute diamo anche i numeri indici del patrimonio e del reddito pel 1925 fatto eguale a 100 il valore del patrimonio e del reddito nel 1914.

	1914 in lire-oro	1925 in lire-oro del 1914	numeri indici
Patrimonio	111.—	87	83.6
Reddito	19.20	15.9.-16	79.5

Sembra che il patrimonio dei privati espresso in lire prebelliche sia diminuito dal 1913 al 1925 del 16.4 per cento, e che a sua volta il reddito sia diminuito del 20.5 per cento.

Dobbiamo perciò concludere che la presente ricchezza d'Italia sia di 1/6 o di 1/5 circa minore della ricchezza prebellica? No; se la ricchezza di una Nazione deve essere desunta dall'ammontare dei beni prodotti e dei servizi prestati, può essere ammesso che in beni e in servizi *essa sia rimasta nettamente stazionaria in confronto di prima della guerra*. La differenza tra i 19-20 miliardi di reddito prebellico e gli attuali 15.9-16 calcolati sulla base del livello dei prezzi all'ingrosso può essere spiegata col fatto che i prezzi delle merci al minuto e di parecchi servizi (ferrovie, tram, poste, telegrafi, ed onorari dei professionisti) non sono aumentati tanto quanto i prezzi all'ingrosso.

Nel 1924 il costo della vita in Italia non superava, e forse non eguagliava cinque volte il costo di prima della guerra. In linea di fatto il numero-indice del costo della vita nel 1924 era del 522 per cento a Brescia ed a Milano, e del 447 per cento a Roma. È probabile che esso stesse fra queste due grandezze in altre parti d'Italia.

Se l'utilità economica del reddito nazionale non è quindi sostanzialmente diminuita, tuttavia la sua potenza d'acquisto nel mercato internazionale è di tanto più bassa di quanto (28 per cento) è la differenza fra la potenza di acquisto della lira-oro attuale e di quella prebellica.

(1) Pantaleoni M., *La curva dei prezzi delle merci in Italia negli anni 1881-1909*

morte, — continuato dal Prof. A. Garino Canina (in *Riforma Sociale* febbraio-marzo 1916 e settembre-ottobre 1920).

Fatto eguale a 100 il valore medio delle merci *esportate* nel 1881, esso, continuamente sino al 1888, con piccole oscillazioni negli anni successivi, discende sino a 67.80 nel 1897, per risalire poi, attraverso altre oscillazioni, sino a 90.05 nel 1913.

Fatto eguale a 100 il valore medio delle merci *importate* nel 1881 esso scende continuamente sino a 79.53 nell'anno 1897, per risalire poi, attraverso oscillazioni varie, sino a 83.80 nel 1913.

Per il periodo 1861-1881 è certo che i prezzi delle derrate agricole sono anche in Italia aumentati dal 1861 al 1873-74, e diminuiti in seguito. Tale è la conclusione a cui si perviene dopo aver studiato le variazioni dei prezzi di alcuni generi alimentari in Italia indicate negli Annuari Statistici del 1878 (pag. 113 A del supplemento), e del 1881 (pagg. 255-263 e pagg. 692, 693 dell'*Appendice*).

Ad identiche conclusioni conduce anche l'esame della curva dei prezzi di alcuni generi alimentari in Milano per il periodo dal 1861-65 al 1880-81. Anche a Milano i prezzi sono aumentati dal 1861-65 al 1873-74; diminuiti dal 1873-74 al 1880-81. (Cfr. Comune di Milano. Dati Statistici a corredo del resoconto della Amministrazione Comunale pel 1908: Appendice. — Statistica dei prezzi del frumento (dal 1770), del pane, del vino, delle carni, del burro e del riso (dal 1801) in Milano. Milano Stabilimento Tipolitografico G. Civelli 1909).

Anche per la Francia fatto eguale a 100 il prezzo medio all'*importazione* di 19 prodotti dell'agricoltura nel periodo 1891-1900 il loro prezzo cresce da 127 nel quinquennio 1861-75 a 140 nel quinquennio 1870-74, per poi discendere sino al 1897-98 (*Annuaire statistique de la France*. 1909 pag. 84, 78 e 210).

Invece i prezzi dei prodotti della industria manifattrice in Italia fra il 1861-65 ed il 1873-74 si dovrebbero dire diminuiti. Così Luigi Bodio (*Di alcuni indici misuratori del movimento economico in Italia*. II Ediz. Roma, 1891. Tipogr. G. Bertero. pagg. 58) indica le sensibili diminuzioni dei prezzi di alcuni generi di vestiario (e cioè, panno grossolano di Biella o di Schiek, tutta lana, stoffa operata, flanella pesante, tela di cotone per camicie, fustagno, maglia grossolana di lana, maglia di cotone) verificatosi dal 1855 al 1885.

Alla stessa conclusione della diminuzione dei prezzi dei prodotti

---

del Dottor Necco. In « Giornale degli Economisti » Dic. 1910; e A. Necco. *I prezzi delle merci in Italia nel 1913*. In « Riforma Sociale » aprile-maggio 1915.

dell'industria manifattrice in Italia dal 1861-65 al 1873-74 si verrebbe per analogia delle variazioni dei prezzi all'*importazione* di 22 prodotti industriali in Francia nello stesso periodo, i quali prezzi sono diminuiti da un indice medio di 177 pel 1861-65 ad un indice medio di 165 pel 1870-74. (Cfr. *Annuaire statistique*, 1909 pag. 210) (1).

Che poi i prezzi dei prodotti industriali in Italia sieno diminuiti dal 1873 al 1882 è dimostrato dai dati che ha fornito Vittorio Ellena nella monografia che citeremo fra poche righe.

Per l'Italia poi anche il SENSINI (op. cit. pag. 138) esprime l'opinione che « durante la seconda metà del secolo scorso sono diminuiti i prezzi dei prodotti dell'industria a causa dei perfezionamenti tecnici.

Ma l'aumento dei prezzi delle derrate alimentari ha certamente superato la diminuzione dei prezzi dei prodotti delle industrie manifattrici, perchè la spesa per l'alimentazione rappresenta sempre, e anche più rappresentava allora, la parte maggiore della spesa totale della Nazione. Ma soltanto la determinazione della quantità di moneta che si scambiava sia con i prodotti agricoli sia con quelli industriali potrebbe indicare di quanto l'aumento dei prezzi delle derrate agricole soverchiasse la diminuzione dei prezzi dei prodotti dell'industria manifattrice.

In ogni modo le variazioni del valore della moneta non hanno speciale importanza per il nostro argomento, perchè esse affettano nello stesso senso tanto il valore dei redditi che quello delle contribuzioni; non però nello stesso periodo, perchè gli accertamenti, e in modo particolare quelli delle somme imponibili agli effetti delle imposte dirette e sui trasferimenti, non sono rinnovati continuamente, ma soltanto agli intervalli fissati dalle leggi regolatrici delle singole imposte. È ovvio che il ritardato accertamento dei nuovi redditi costituisce un danno per il contribuente, quando la variazione dei prezzi è nel senso della diminuzione, è un beneficio nel caso opposto. (Per le variazioni dei prezzi in Italia nel periodo considerato cfr. anche GEISSER A. e MAGRINI E. *Contribuzione alla storia e statistica dei salari industriali in Italia nella seconda metà del secolo XIX.* Torino. Roux e Viarengo. 1904; ARIAS G. *Principii di economia commerciale*

---

(1) Per contro per l'Inghilterra il numero-indice dell'*Economist*, fatta eguale a 2200 (100) la somma dei prezzi di 22 prodotti della agricoltura e dell'industria manifattrice per il periodo 1845-50, diventa 3292 (149) per il periodo 1861-65 e discende a 2789 (127) per il periodo 1871-74. (DALLA VOLTA R. *Questioni economiche di ieri e di domani*, Soc. Editr. Libraria Milano, 1915, pag. 421).

Società Edit. Libraria. Milano, 1917 pagg. 180-194. « Annali del Ministero dell'Agricoltura, Ind. e Commercio ». Vol. 72 (anno 1874). *Notizie per la storia dei prezzi.* Per i prezzi di 23 prodotti agricoli nel mercato di Rimini dal 1863 incluso al 1874 incluso, cfr. il Vol. 80° dei suddetti *Annali.* pagg. 34, 35. Roma. Eredi Botta. 1879. Vedi anche: *Relazione sulla circolazione cartacea, presentate dal Presidente del Consiglio dei Ministri.* Roma, Botta. 1875. pagg. 297, 298 e Prospetto 78, Cfr: inoltre ELLENA V. *La tariffa doganale* in « Annuario delle scienze giuridiche, sociali e politiche » diretto da C. FR. FERRARIS. 1883. Milano, Hoepli. pagg. 611 e 642).

CAPITOLO XI.

Conclusione.

Con le cifre indicanti il valore delle *contribuzioni* (nel senso che abbiamo in precedenza chiaramente attribuito a questa parola) pagate allo Stato, alle Provincie ed ai Comuni, e l'ammontare del reddito dei privati, che noi abbiamo raccolto e calcolato in questo lavoro, possiamo procedere alla costruzione della seguente tavola numerica.

Periodi	Contribuzioni (in milioni di lire)	Patrimonio (successioni + donas) × 12 × 32 (in miliardi di lire)	Reddito dei privati (in miliardi di lire)	Percentuale delle contribuzioni	Popolazione (milioni di abitanti)	Reddito per abitante (lire)	Imposta per abitante (lire)	Anni
1861/64	711 (1864)	34.9	5.8-6.2	*11.85*	24.9	240	28	1861
1876	1215	42.1	9-10	*12.50*	27.7	340	35	1876
1887	1524	57.4	12	*13.27*	29.6	388	51	1887
1892	1610.7	57.6	12	*13.43*	30.6	392	52	1892
1898	1713.3	56.1	13	*13.17*	31.9	392	53	1898
1914	2997.2	—	19-20	*15-16*	35.8	544	83	1914
1924 *a*)	22240.—		100			2500 *a*)	554	1924
1924 *b*)	3802.—	—	15.9-16	*22.80*	40.1	400 *b*)	97	1924
1924 *c*)	4835.—		21.7			545 *c*)	135	1924

a) Lire-carta
b) lire pre-belliche (indice dei prezzi all'ingrosso del prof. Bachi = 585)
c) 100 lire-oro = 460 lire-carta

Dall'esame di questa tavola risulta che dal periodo dell'unificazione ai nostri giorni, l'economia italiana ha presentato tre periodi di

progresso e due periodi di depressione o almeno di stazionarietà. Dei periodi di progresso il primo va dal 1861 al 1876; il secondo dal 1898 all'inizio dell'ultima grande guerra; gli anni dal 1876 al 1887 sono anch'essi anni di progresso, sebbene questo proceda con ritmo assai meno forte che nel periodo precedente; i periodi 1887-1892 e 1892-1898 segnano stati di depressione dell'attività produttrice.

Il periodo fortunoso 1914-1924, se ha visto parte della ricchezza nazionale consumata nella guerra, ha assistito anche all'opera di ricostruzione, cosicchè si può affermare, che per merito della grande attività svolta dagli Italiani negli ultimi anni del dopo guerra, la produzione economica ha già colmato le grandi falle aperte dalla guerra nella ricchezza nazionale.

Nel suo complesso, in tutto il periodo considerato, la ricchezza della Nazione è aumentata sia assolutamente, sia in rapporto all'aumento della popolazione, ma le contribuzioni sono aumentate in una proporzione quasi doppia di quella della ricchezza.

2. — Procedendo col metodo dei numeri-indici, fatti eguali a 100 la popolazione, il reddito totale, il reddito per persona, le contribuzioni all'epoca della unificazione, i numeri-indici dal 1924-25 ammontano rispettivamente a 161 per la popolazione, che continua a presentare quel moderato aumento che le è caratteristico, a 266 per il reddito complessivo, a 172 per il reddito medio individuale, a 534 per le contribuzioni.

In sostanza, la percentuale che le contribuzioni hanno prelevato sul reddito dei privati è andata aumentando, con ritmo continuo ma lentissimo, dal 1861 al 1914, crescendo in questi 53 anni dall'11.85 nel 1861/64 al 15-16 per cento nel 1913/14.

L'aumento assoluto delle contribuzioni è stato molto forte nei due periodi 1861-1876 (da 711 a 1215 milioni e cioè del 70 per cento) e dal 1898 al 1914 (da 1713 a 2997 milioni, e cioè del 75 per cento), ma in entrambi i periodi l'aumento assoluto delle imposte è stato quasi completamente compensato dal contemporaneo aumento del reddito nazionale, cosicchè la percentuale delle contribuzioni in relazione col reddito è cresciuta soltanto dall'11.85 al 12.50 per cento, ossia del 5.5 $^{0}/_{0}$ nel primo periodo, e in misura più notevole, ma sempre moderata e cioè dal 13 al 15-16 per cento, ossia del 15-23 per cento, nel secondo periodo.

La percentuale delle contribuzioni sul reddito presenta invece un fortissimo aumento nel periodo 1914-1924, essendo balzata dal 15-16 al 22-23 per cento (con un aumento percentuale del 45-46).

Il problema per risolvere il quale abbiamo compiuto questo lavoro è risolto: nel nostro paese dall'epoca della unificazione ai nostri giorni il rapporto fra le contribuzioni ed il reddito è aumentato di quasi il cento per cento. In questo caso è dunque vera l'opinione prevalente e quasi generale, e non quella dei pochi specialisti, i quali d'altra parte sono giustamente molto apprezzati e benemeriti in altri campi della scienza finanziaria, che hanno affermato la tesi contraria.

Se la causa che ha determinato il più forte aumento delle contribuzioni in confronto al reddito è stata l'ultima grande guerra, alla quale d'altra parte sarebbe stato errore non partecipare, è pure necessario riconoscere che lo Stato presta oggi in modo più esteso e più intenso quei servigi che esso già rendeva nel periodo della unificazione, ed altri nè presta — assicurazioni sociali, ispezione delle fabbriche, protezione dell'emigrazione etc. — che allora non rendeva.

3. — Ci siano consentite pochissime parole di commento che esprimano il significato di questo lavoro.

La percentuale delle contribuzioni in confronto al reddito nazionale risulta ora alquanto pesante ed è necessario evitare che venga aumentata ulteriormente in considerazione delle esigenze della produzione, che richiede per i suoi scopi, un afflusso sempre crescente del risparmio.

Data la inesorabile tendenza delle spese pubbliche a crescere per il soddisfacimento sempre più intenso ed esteso dei bisogni collettivi, per fissare la percentuale delle contribuzioni sul reddito dei privati nella misura attuale, e anche per ottenere una qualche diminuzione, sarebbe antistorico ed utopistico fare assegnamento su una diminuzione assoluta delle contribuzioni; è necessario invece da una parte lasciar stare, non aumentare il saggio delle imposte esistenti, calcolando soltanto sull'aumento del loro prodotto determinato dall'aumento della ricchezza imponibile, e fare dall'altra affidamento sull'incremento del reddito; che con la sua espansione renda costante o magari anche attenui l'attuale pressione delle contribuzioni sul reddito della Nazione.

Esercizi	Entrate effettive dello Stato (in milioni di lire)	Imposte dirette (1) (in milioni di lire)	Imposte sui trasferimenti e sugli affari (2) (in milioni di lire)	Imposte sui consumi (3) (in milioni di lire)	Beneficio netto dei monopoli fiscali (sale, tabacco e lotto) (4) (in milioni di lire)	Totale delle contribuzioni governative (5) (in milioni di lire)	Entrate effettive ordinarie dei Comuni detratte le rendite patrimoniali (in milioni di lire)	Sovrimposte comunali sui terreni e sui fabbricati (in milioni di lire)	Dazio di consumo comunale (in milioni di lire)	Tasse e diritti comunali (6) (in milioni di lire)	Entrate ordinarie delle Provincie (in milioni di lire)	Totale delle contribuzioni Colonne 7+8+12 (in milioni di lire)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1862 (7)	480.2	133.0	54 9	82.6	76.0	383.9	—	—	—	—	16.6	—
1863 (7)	524.1	135.6	67.6	84.7	96.0	434.4	123.5	58.8	24.7	—	19.7	577.6
1864 (7)	576.4	154.4	72.8	85.5	65.6	482.6	140.0	63.6	37.0	—	23.0	645.6
1865 (7)	645.6	203.5	77 2	95.0	92.1	512.3	170.8	76.2	49.0	—	24.5	707 6
1866 (7)	617.1	161.4	73.9	95.3	104.3	595.1	199.2	69.4	60.2	23.0	46.4	840.7
1867 (8)	714.4	248.9	76.9	133.1	126.0	672.7	229.0	82.0	56.6	26.8	51.6	953 2
1868 (8)	748.5	266.1	95.6	137.0	146.3	697.2	232.8	91.9	56.1	22 7	55.8	985.8
1869 (8)	870.6	291.1	98.5	156.5	147.5	795.1	207.3	89.8	59.3	—	59.7	1047.1

(1) Imposta sui fondi rustici, sui fabbricati, sulla ricchezza mobile, complementare sul reddito, straordinaria sul patrimonio, sui profitti di guerra, sugli aumenti di patrimonio derivanti dalla guerra, sui proventi degli amministratori delle società anonime, sui compensi ai dirigenti e procuratori di società, complementare sui redditi superiori a lire 10.000; imposta 15 % sui dividendi, interessi e premi, contributo del centesimo di guerra, quota addizionale sulle imposte dirette a favore dei mutilati, altre imposte dirette.

(2) Tasse di registro, di bollo, sulle successioni e di manomorta, ipotecarie, in surrogazione del registro e bollo, sulle concessioni governative, sugli scambi, diritti delle Legazioni e Consolati.

(3) Imposte di fabbricazione, sulla macinazione dei cereali, sul vino, dogane e diritti marittimi (comprese le quote di cambio), imposta sul consumo del caffè, tasse sulla vendita, tasse di bollo sui consumi.

(4) Le cifre di questa colonna indicano la differenza fra le entrate lorde e le spese di produzione e di amministrazione, aumentate del 10 per cento.

(5 La colonna 7ª non indica la somma delle colonne 3, 4, 5 e 6, che però ne costituiscono gli addendi principali, ma la differenza tra le entrate effettive dello Stato e tutte le entrate chè non sono *contribuzioni*.

(6) Tassa sul valor locativo, di famiglia o fuocatico, sul bestiame agricolo, sulle bestie da tiro, da sella e da soma, sui cani, sulle vetture pubbliche e private, sui domestici, di esercizio e rivendita, di licenza per alberghi, caffè ecc., tasse scolastiche, diritti sugli atti dello stato civile, sugli atti del giudice conciliatore, tassa di macellazione, diritti diversi, tassa per occupazione di aree pubbliche ecc.

(7) Escluse le Provincie Venete e di Mantova ed il Lazio.

(8) Escluso il Lazio.

Esercizi	Entrate effettive dello Stato (in milioni di lire)	Imposte dirette (in milioni)	Imposte sui trasferimenti e sugli affari (in milioni)	Imposte sui consumi (in milioni)	Beneficio netto dei monopoli fiscali (sale, tabacco e lotto) (in milioni)
1	2	3	4	5	6
1870 (2)	865.9	271.7	102.5	162.1	149.1
1871	966.1	335.3	115.8	190.3	153.4
1875	1096.3	346.2	151.1	243.8	171.7
1876	1132.3	353.2	148.0	256.1	162.9
1880	1221.2	364.2	166.7	258.0	195.4
1885/86	1409.1	393.3	191.9	306.5	211.9
1887/88	1499 9	389.9	298.4	357.3	190.9
1890/91	1540.—	416.8	216.4	244.8	224.0
1893/94	1517.1	447.3	208.7	214 9	219.3
1895/96	1633.6	483.9	211.0	274.8	218.6
1897/98	1629.4	481.8	218.1	313.0	210.9
1900/01	1721.—	485.0	239.9	401.7	236.5
1905/06	1946.—	494.4	259.5	479.7	273.5
1910/11	2403.—	480.1	316.5	619.8	323.6
1913/14	2524.—	540.6	293.9	783.4	395.5
1914/15	2560.—	592.4	298 9	835.0	399.3
1915/16	3734.—	720.8	337.9	925.0	497.5 (2)
1916/17	5345.—	1057.9	448.4	1053.1	588.5 (2)
1917/18	7533.—	1531.6	588.6	1442.9	744.8 (2)
1918/19	9676.—	2065.5	820.0	2843.5	995.8 (2)
1919/20	15 207	2337.7	1318.1	3244.5	1491.0 (2)
1920/21	18.820	4102.1	1931.5	4435.—	1912.7
1921/22	19 701	4749.4	2116.0	3330.—	2392.9
1922/23	18.804	4181.4	2175.0	3627.3	—
1923/24	19.138	5259.9	2660.1	4558.3	—
1924/25	19.513	5131.5	2853.0	4463.—	2434 (2)
1925/26	20.837	5553.8	3270.—	5247.—	—

(1) Senza il Lazio. — (2) Dato ottenuto a calcolo nel modo indicato nella nota 4. — (3) Bilanci preventivi 1925 rendite patrimoniali incluse. — (4) Bilanci preventivi 1925.

Totale delle contribuzioni governative (in milioni)	Entrate effettive ordinarie dei Comuni detratte le rendite patrimoniali (in milioni)	Sovrimposte comunali sui terreni e sui fabbricati (in milioni)	Dazio consumo comunale (in milioni)	Tasse e diritti comunali (in milioni)	Entrate ordinarie delle Provincie (in milioni)	Totale delle contribuzioni colonne 7+8+12 (in milioni di lire)
7	8	9	10	11	21	14
798.7	189.0	88.7	61.1	22.5	61.7	1049.4
910.5	207.6	78.5	71.0	27.9	62.6	1180.7
913.3	225.5	97.7	79.3	34.3	66.6	1204.4
916.6	230.7	100.7	83.5	35.3	67.5	1215.0
1021.6	250.2	—	—	—	73.7	1345.3
1115.4	303.6	119.4	122.7	—	81.1	1500.1
1131.3	310.3	117.2	129.6	54.4	82.5	1514.1
1149.9	366.8	—	—	—	89.5	1605.3
1145.4	367.8	—	—	—	89.5	1610.7
1188.3	353.0	129.9	152.0	60.0	88.9	1602.7
1253.8	365.0	133.5	157.4	60.7	89.5	1713.3
1415.1	370.6	134.0	158.7	62.8	89.9	1875.6
1584.1	—	152.2	—	—	—	—
1826.0	—	—	—	—	—	—
2157.7	692	246.	—	—	147.5	2997.2
2163.8	—	269.2	—	—	157.1	—
2575.—	—	—	—	—	—	—
3741.—	—	295.2	231.8	—	—	—
4919.—	—	318.5	—	—	—	—
7.501	—	341.8	—	—	—	—
13.870	—	—	—	—	178.2	—
15.524	1947.7	700.5	772.3	—	—	—
17.802	2374.7	847.0	1000.—	—	624.9	20.801
—	—	—	—	—	620.4	—
—	—	—	—	—	—	—
17.783	3754.7	1037.5	—	—	703.3	22.240
—	4110.— (3)	—	—	—	892 (4)	—

Provincie Venete e di Mantova

Esercizi	Entrate effettive dello Stato (in milioni di lire italiane)	Imposte dirette (in milioni)	Imposte sui trasferimenti e sugli affari	Imposte sui consumi	Beneficio netto dei monopoli fiscali	Totale delle contribuzioni governative (1) (in milioni di lire)	Entrate effettive ordinarie dei Comuni detratte le rendite patrimoniali (in milioni)	Sovrimposte comunali sui terreni e sui fabbricati (in milioni)	Dazio di consumo comunale (in milioni)	Tasse e diritti comunali (in milioni)	Entrate ordinarie delle Provincie	Totale delle contribuzioni (colonne 7+8+12) (in lire italiane)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1862 (2)	73.790	22.168	7.092	15.217	15.716	59.083	38.1	16.2	1.482	—	—	—
1863 (2)	70.009	21.692	7.271	13.531	13.316	56.600	39.1	14.2	1.500	—	4.600	90.300
1864 (2)	72.583	24.549	8.073	11.939	18.818	64.141	39.9	14.8	—	—	—	—
1865 (2)	71.360	24.737	7.985	11.213	17.139	67.899	31.9	14.7	—	—	—	—
1866 (2)	64.827	22.428	6.400	10.200	22.100	62.041	32.0	17.3	1.693	3.2	—	—
1867 (3)	68.200	19.400	6.800	14.700	18.500	60.505	32.0	17.3	1.693	3 2	3.966	96 471

Stato Pontificio (Lazio)

1864	26.229	5.206	1.502	12 779	2.376	22.100	9-9.5	—	—	—	1.5	32,6-33.1
1867	35.358	5.888	1.797	19.669	2.976 (4)	30.486	—	—	—	—	—	—

(1) La colonna 7ª non indica la somma delle colonne 3, 4, 5 e 6, che però ne costituiscono i principali addendi, ma la differenza tra le entrate effettive dello Stato e le entrate che non sono contribuzioni.

(2) Per gli anni 1862, 1863, 1864, 1865 e 1866 i dati sono presi dalle annate 1863, 1864, 1865, 1866, e 1867 dello « *Statistisches Jahrbuch der Oesterreichischen Monarchie* » (Vedi il capit.: *Staats-Einnahmen in der Verwaltungs-Periode...*

(3) Per l'anno 1867 i dati sono presi dal « Conto generale della Amministrazione delle Finanze per l'esercizio 1867 ». — Firenze. Stamperia Reale, 1870.

(4) Dato ottenuto a calcolo nell'ipotesi che il rapporto fra beneficio netto e entrata lorda sia stato lo stesso che nell'anno 1864. L'unico monopolio fiscale dello Stato Pontificio era quello del lotto.

FONTI.

ALBERTI M. *La fortuna economica di Trieste ed i suoi fattori.* Trieste. Pozzetto e & C. 1913.

ALESSIO G. *Saggio sul sistema tributario Italiano,* 2 vol. 1883 e 1887. Bocca. Torino.

— *Contributo al concetto economico-nazionale del patrimonio e del reddito.* In « Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti ». Anno accademico 1910-11. Tomo LXX. Parte II. Venezia 1911.

— *Nuove ricerche sul concetto di patrimonio e di reddito* in « Atti della R. Accademia dei Lincei ». Serie V. Vol. XVII fasc. II (pagg. 31-114), Roma 1923.

Almanach de Gotha pour les années 1866, 1868 et 1871.

Annuario del Ministero delle Finanze dall'anno 1862 all'anno 1871 incluso.

Annuario Statistico Italiano per cura di C. Correnti e di P. Maestri. Anno II, 1863-1864, Torino 1864. Tip. Letteraria.

Annuario Statistico Italiano dal 1878 in poi.

BACHI R. *L'Italia economica.* « Annuario della vita commerciale industriale, agraria, bancaria, finanziaria e della politica economica ». Pubblicazione della « Riforma Sociale ». dal 1909 a tutto il 1921.

BATTISTELLA C. *Il concetto di reddito in economia, in finanza e nel diritto finanziario.* Rovigo Tip. Sociale. 1913.

BENEDETTI J. *La produzione della ricchezza privata prima della guerra* in « Giornale dei lavori pubblici e delle strade ferrate ». Agosto 1916.

BAGLIO G. *Monografia di famiglia del contadino giornaliero in Sicilia nell'anno colonico 1904-05.* In « Giornale degli economisti » ottobre 1912.

BENINI R. *Distribuzione probabile della ricchezza privata in Italia per classi di popolazione.* In « Riforma Sociale » giugno 1894.

— *Principî di statistica metodologica.* Torino. Un. Tip. Editr. 1906.

— *La demografia Italiana* in « Cinquanta anni di storia italiana » pubblicazione compiuta per iniziativa della R. Accademia dei Lincei. Vol. I. Milano. Hoepli. 1912.

Bilanci Comunali e Bilanci provinciali per gli anni 1866, 1867 e 1868. Firenze. 1868.

Bilanci (I) Comunali nell'anno 1924, raccolti e pubblicati per iniziativa della « Associazione dei Comuni Italiani » da U. Giusti e S. Verratti. Fasc. I: Le fonti di reddito (1924) ; fasc. II : Le spese (1925). Roma. S. A. Industrie Grafiche.

Bollettino mensile di statistica dell'Istituto Centrale di Statistica del Regno d'Italia. Novembre 1926. (fasc. I°).

Bollettino di statistica e legislazione comparata. Anno I° 1900-1901. VI.

Idem. Anno IV (1903-04).

Idem. Anno IX fasc. I° (1908-09).

Idem. Anno XI° fasc. I° (1910-1911)

Idem. Anno XII° fasc. IV° (1911-1912).

Idem. Anno XIV° (1913-1914).

Bodio L. *Di alcuni indici misuratori del movimento economico in Italia.* II. ediz. Roma. Bertero 1891.

Bonghi R. *Storia della finanza italiana dal 1861 al 1868.* Firenze. Sucess. Le Monnier. 1868.

— *La vita e i tempi di Valentino Pasini.* Firenze. Barbera. 1867.

Borgatta G. *The fiscal burden upon the Italian joint stock companies.* Roma. 1925. Libreria del Provveditorato dello Stato.

Broglio d'Ayano R. *La politica doganale dello Stato Pontificio.* In « Giornale degli economisti » dell'anno 1911.

— *La politica doganale del Piemonte dal 1815 al 1834.* In « Giornale degli economisti » aprile-maggio 1912.

Brucoleri G. *Un po' di luce sulla distribuzione della proprietà in Sicilia.* In « Giornale degli Economisti » agosto 1912.

Bianchini L. *Della storia delle finanze del Regno di Napoli.* III Ediz. Napoli. Stamperia Reale. 1859.

— *Della storia economico-civile di Sicilia.* 2 Vol. Napoli. Stamperia Reale. 1841.

Cantù C. *Cronistoria della indipendenza italiana.* Vol. II°. Un. Tip. Edit. Torinese. 1872.

Canovai T. *L'Italia presente e i suoi problemi morali politici, economici e finanziari.* Roma. Balbi. 1900.

Cattaneo C. *Stato delle finanze del Regno di Napoli con alcuni cenni sulla prosperità di quel paese.* In « Annali universali di statistica, economia pubblica, storia, viaggi e commercio ». Vol. 48. Milano. Tip. Lampato. 1836.

Carano Donvito G. *La finanza del nuovo Regno d'Italia ed i suoi effetti sulle condizioni delle classi rurali del Mezzogiorno.* In « Giornale degli Economisti ». Maggio 1910.

Carpi L. *Della emigrazione italiana all'estero.* Firenze. Tip. Civelli 1871.

Censimento del 1861. Vol. III°.

Censimento degli opifici e delle imprese industriali al 1° giugno 1911.

Ciasca R. *L'evoluzione economica della Lombardia dagli inizi del secolo XIX al 1860 nella pubblicazione* « La Cassa di Risparmio delle Provincie Lombarde nella evoluzione economica della regione ». Milano. Artigrafiche 1923.

— *Per la storia delle classi sociali nelle Provincie meridionali durante la prima metà del secolo XIX.* Napoli I. T. E. A. Editrice. 1926.

« *Civiltà Cattolica* » Anno 1865.

Colaianni N. *Gli avvenimenti di Sicilia e le loro cause.* Palermo. S. Sandron. 1896.

— *Il progresso economico italiano.* 2 Vol. Roma C. A. Bontempelli 1914.

Coletti F. *La determinazione della durata della generazione e il calcolo della ricchezza privata di un paese.* In « Riforma Sociale ». Anno XIV Vol. XVII.

— *Dell'emigrazione italiana* in « Cinquanta anni di storia italiana » Hoepli. Milano. 1912.

COLETTI F. *La mortalità dei primi anni di età e la vita economica in Sardegna.* Torino. 1908.

COMMERCIO (*saggio sul*) *esterno terrestre e marittimo del Regno d'Italia negli anni 1862 e 1863* (pubblicazione del Ministero delle Finanze). Firenze. 1863.

CONIGLIANI C. A. *L'aumento apparente delle spese pubbliche e « Le denier royal » di Scipione de Gramont.* Milano Bartolotti. 1890.

— *La riforma delle leggi sui tributi locali: studi e progetti.* Modena. Società Tip. 1898.

Conto generale dell'Amministrazione delle Finanze per gli esercizi 1862 a tutto 1867. Firenze Stamperia Reale. 1870.

Conto riassuntivo del Tesoro: pubblicazione mensile del Ministero delle Finanze dall'ottobre 1922 a tutto ottobre 1926.

CONTENTO A. *Ripartizione territoriale della ricchezza in Italia* in « Giorn. degli Econom. » giugno 1914.

Contratti (I) agrari in Italia. Ministero di Agricolt. Ind. e Comm. Direz. Gener. della Agricolt. Roma 1891.

COPPI A. *Annali d'Italia dal 1750 al 1861.* Tomo XV. Firenze. Cellini e C. 1867.

COPPINI C. *La frode nell'imposta di successione.* Fratelli Bocca (Siena. Ditta G. Nava) 1916.

CURCI C. M. *Di un socialismo Cristiano nella questione operaia e nel conserto selvaggio dei moderni stati civili.* Firenze. Fratelli Bencini. 1885.

DE CESARE R. *Roma e lo Stato del Papa dal ritorno di Pio IX al XX Settembre.* Vol. I° Roma. Forzani. 1907.

DE FOVILLE A. *Les valeurs successoriales et la répartition territoriale de la richesse en France.* In « Economiste Français » 1881. Novembre 5.

DE FOVILLE A. *La ricchezza in Francia ed in altri paesi* in « Giorn. degli Econom. » luglio 1893.

DE FRANCISCI GERBINO G. *Sul concetto di patrimonio e sulla sua funzione dal punto di vista tributario* in « Giorn. degli Econom. » ottobre 1911.

— *Le imposte patrimoniali e la valutazione del patrimonio fondiario.* Milano. Vallardi. 1912.

— *Sul concetto di reddito in relazione al consumo* in « Giorn. degli Econom. » febbraio 1911.

DE JOHANNIS J. *La finanza in « Mezzo secolo di vita italiana (1861-1911) ».* Milano. Vallardi. 1911.

DE' STEFANI A. *Documenti sulla condizione finanziaria ed economica dell'Italia.* Roma 1923.

DI NOLA C. *La crisi cotoniera e l'industria del cotone in Italia,* In « Giorn. degli Econom. » aprile-maggio e giugno 1912.

DOLFIN S. *Una famiglia di mezzadri in Provincia di Parma.* (Monografia di famiglia) in « Giorn. degli Econom. » Luglio-agosto 1912.

EINAUDI L. *Intorno al concetto di reddito imponibile e di un sistema di imposte sul reddito consumato.* Torino. 1912.

EINAUDI L. *Il bilancio italiano.* Quali difficoltà esso ha superato ecc. Roma Tip. G. Bertero e C. 1915.

ELLERO P. *La tirannide borghese.* Bologna Tip. Fava e Garagnani. 1879.

— *La riforma sociale.* Bologna Tip. Fava e Garagnani 1879.

FERRERO G. *La vecchia Italia* (Dal 1830 al 1848). In « La vita Italiana del Risorgimento » (1831-1846) Serie II. Vol. I (Storia) Firenze. R. Bemporad e figlio. 1899.

Finanza locale (Il problema della) Studiato per cura della Associazione dei Comuni Italiani » relatore Dott. U. Corti. Roma S. A. I Grafiche. 1924.

FISHER J. *La natura del capitale e del reddito* in « Bibliot. dell'Econom. » Serie V. Vol. IV.

FLORA F. *Manuale di scienza delle finanze.* VI Ediz. Livorno. 1921.

FORTUNATO G. *Il Mezzogiorno e lo Stato italiano.* 2 Vol. Bari. Laterza. 1912.

FRANCHETTI L. e SONNINO S. *La Sicilia nel 1876.* Vol. II I contadini in Sicilia. Firenze. Barbera. 1877.

GABRIELLI WISEMAN G. *L'agricoltura nella economia nazionale e sociale dell'Italia.* In « Nuova Antologia » 1° maggio 1915.

GINI C. *L'ammontare e la composizione della ricchezza delle Nazioni.*. Torino. Bocca. 1914.

— *Sul presumibile ammontare dei danni di guerra* in « Giorn. degli Econom. » gennaio 1919.

— *Sulla valutazione della ricchezza nazionale.* In « Giorn. degli Econom. » luglio 1919.

— *Problemi sociologici della guerra.* Bologna. Zanichelli. 1921.

— *A comparison of the wealth and national income of several important Nations.* Roma. 1925. Libreria del Provveditorato Generale dello Stato.

— *The present economic status of Italy as compared with pre-war years and its possibilities of futur development.* Roma 1925. Libreria del Provveditorato Generale dello Stato riprodotto in appendice del volume di MC. GUIRE. « *Italy's Economia International Position* ». Washington. 1926.

— *La ricchezza comparata delle Nazioni.* « Nuova Antologia ». Luglio 1926.

GARELLI A. *Il concetto di reddito nella scienza finanziaria* in « Filangieri » luglio 1917. Società Edit. Libraria. Milano.

GRAZIANI A. *Istituzioni di scienza delle finanze.* II Ediz. Torino. 1911.

Inchiesta parlamentare sulle condizioni dei contadini nelle Provincie meridionali e nella Sicilia. Roma. 1909.

JACINI S. *La proprietà fondiaria e la popolazione agricola in Lombardia.* Milano Ciulelli. 1857.

Jahrbuch (statistiches) der Oesterreichischen Monarchie für das Jahre 1864 und folgende. Wien.

JANNACCONE P. *La ricchezza nazionale e il costo economico della guerra* in « Riforma Sociale » marzo-aprile 1919.

JARACH C. *L'emigrazione transoceanica nel 1912* in « Giornale degli Economisti ». 1923 gennaio.

LANINO P. *La questione meridionale, questione nazionale.* Roma Tip. Unione. 1920.

LEI SPANO G. M. *La questione Sarda con dati originari e prefazione di L. Einaudi.* Torino Fratelli Bocca 1922.

LIA A. *L'imposta mobiliare e la riforma dei tributi diretti in Italia.* Ordinamento, funzione, proposte. Torino Roux e Viareggio 1906.

LORIA A. *La sintesi economica.* Studio delle leggi del reddito. Torino Bocca. 1909.

LORINI E. *Scienza delle finanze.* Pavia Mattei e C. 1912.

LO SAVIO N. *Del salariato e delle istituzioni che lo debbono modificare: studio.* Milano. G. Brigola 1874.

LUZIO A. *Francesco Giuseppe e l'Italia.* Milano Treves 1917.

LUZZATTO G. *L'evoluzione economica della Lombardia dal 1860 al 1922.* Nel volume « La Cassa di Risparmio delle Provincie Lombarde » op. cit.

MAESTRI P. *Annuario economico-politico.* Anno I. 1852. Torino Libreria Patria.

MAESTRI C. *Vedi Annuario statistico italiano pel 1863-64.*

— *L'Italie économique en 1867* Firenze 1867.

— *L'Italia economica nel 1870.* Firenze Civelli. 1871.

MAESTRI P. e CORRENTI C. *L'Italia economica nel 1873.*

MAGLIANI A. *Le finanze del Regno* (delle due Sicilie) nel 1858. Roma 1890. Tip. G. Ciotola, Edit. da pag. 6 alla fine.

MALAGUZZI VALERI G. L. *Trattative segrete italo-austriache prima della guerra del 1866* In « Rivista d'Italia » Anno VII. Vol. II° (1905).

MARIN C. *Perchè l'Italia è povera e come può diventare ricca.* Verona-Padova. Fratelli Drucker. 1903.

MAROI L. *Come si calcola e a quanto ammonta la ricchezza d'Italia e delle altre principali Nazioni.* In « Rivista delle Società commerciali » ottobre 1918.

MARSHALL A. *Principles of Economics.* VI Edit. Londra. Macmillan and Co. 1920.

MASCI G. *Il concetto e la definizione del reddito.* Napoli. Pierro. 1913.

MASÈ DARI E. *L'imposta progressiva.* Indagini di storia e di economia della Finanza. Bocca Torino 1897.

MENEGHINI A. *Le finanze austriache.* Torino 1860.

— *Le imposte nella Venezia e nella Lombardia.* Torino. 1863.

— *Delle condizioni finanziarie delle Provincie Italiane tutt'ora soggette all'Austria.* Torino. Unione Tip. Edit. 1864.

MORPURGO E. *La finanza. Studi di economia e di statistica comparata.* Firenze Lemonnier. 1877.

MORTARA G. *Intorno al calcolo della ricchezza privata* in « Giornale degli Economisti », luglio 1909.

— *Numeri indici dello stato e del progresso economico delle Regioni d'Italia.* In « Giornale degli Economisti » luglio 1913.

— *Numeri indici delle condizioni economiche d'Italia.* (1871-1912) in « Giornale degli economisti » settembre 1913.

— *Prospettive Economiche dal 1921 al 1926.* Città di Castello. Soc. Tip. « Leonardo da Vinci ».

NITTI FR. S. *Il bilancio dello Stato dal 1862 al 1896-97.* Prime linee di una inchiesta sulla ripartizione territoriale delle entrate e delle spese pubbliche in Italia. Napoli Soc. Anon. Coop. 1900.

— *La ricchezza dell'Italia.* Quanto è ricca l'Italia. Come è distribuita la ricchezza in Italia. Torino Roux e Viarengo, 1905.

— *Principi di scienza delle finanze,* V ediz. Napoli. Pierro. 1922-1924.

PANTALEONI M. *Delle regioni d'Italia in ordine alla loro ricchezza ed al loro carico tributario* in « Giornale degli Economisti » gennaio 1891.

— *Dell'ammontare probabile della ricchezza privata in Italia dal 1872 al 1889* in « Giornale degli Economisti » agosto 1890.

— *Nota sul calcolo della ricchezza privata fatto da L. Principalle* in « Scritti vari di economia » Serie III. Roma, Castellani, 1910.

PASINI V. *L'Autriche et le Royaume Lombard-Vénetien* au point de vue financier. Firenze. Barbera. 1859.

PERALDI M. F. *Sullo Stato attuale dei dominj della Chiesa Romana.* Bastia. Tip. Fabiani. 1855.

PELLEGRINI U. *Il risorgimento economico dell'Italia dalla costituzione del Regno al 1921.* Soc. Edit. Libraria. Milano 1922.

PIERSON N. G. *Trattato di economia politica.* 2 Vol. Versione di E. Malagoli. Torino. Bocca. 1905.

PRINCIVALLE L. *La ricchezza privata in Italia.* In « Atti del R. Istituto di incoraggiamento di Napoli ». Serie VI. Vol. VII (1909).

— *Intorno al coefficiente per il calcolo della ricchezza privata in base alle denunzie per successione.* In « Giornale degli Economisti », 1911 luglio e ottobre.

RACCA V. *Il progresso della industria italiana* in « Mezzo secolo di vita italiana » (1861-1911) Milano. Vallardi. 1911.

. . . . . .

RICCI U. *Che cosa è il reddito* in « Giornale degli Economisti » agosto 1913.

ROSCHER W. *Grundlagen der National-ökonomie. 28 Aufl.* Stuttgart. 1897.

RINALDI A. *Le terre pubbliche e la questione sociale.* Roma 1896. Pasqualucci. Tip. dell'Un. Coop. Edit.

SACHS I. *L'Italie, ses finances et son developpement économique etc.* Parigi. Guillaumin et C. 1885.

SANDONÀ A. *Il Regno Lombardo-Veneto* (1814-1859). *La Costituzione e l'Amministrazione* Milano. Cogliati. 1920.

SANTORO M. *L'Italia nei suoi progressi economici dal 1860 al 1910.* Roma 1910 Tip. Pop.

SAVORGNAN FR. *L'ammontare e la composizione della ricchezza in Italia e nelle sue regioni.* In « Rivista italiana di Sociologia » maggio 1916.

— *La ripartizione territoriale della ricchezza privata italiana* in « Metron ». Vol. I° N. 3 (aprile 1921).

SCIALOIA A. *I bilanci del Regno di Napoli e degli Stati Sardi del secolo XIX° con note e confronti.* Società Edit. Italiana di M. Guigani. 1857.

SHIRRAS-FINDLAY G. *Taxable capacity and the burden of taxation and public debt.* In « Journal of the R. Statistical Society ». 1925. pagg. 513-556.

SEGRE A. *Manuale di storia del commercio.* 2 Vol. Torino. S. Lattes e C. 1913-1915.

SEGRE S. *Dal disavanzo alla conversione. Disegno storico della politica finanziaria Italiana dal 1876 al 1906.* Torino. Bocca. 1911.

SENSINI G. *Le variazioni dello stato economico d'Italia nell'ultimo trentennio del secolo XIX.* Roma. Loescher. 1904.

SILVA P. *Il sessantasei.* Milano. Treves. 1917.

SITTA P. *L'aumento progressivo delle spese pubbliche.* Ferrara. Taddei. 1893.

SOLITRO G. *Valentino Pasini e l'emigrazione Veneta.* Padova. 1895.

SOMBART W. *La campagna romana*: studio economico-sociale. Traduz. di F. C. Jacobi. Torino. Loescher. 1891.

SONNINO S. *Vedi Franchetti L.*

STAMP M. J. *The wealth and income of the chief Powers.* In « Journal of the R. Statistical Society ». luglio 1919.

Statistica comparata dei bilanci dei principali Stati d'Europa per gli esercizi dal 1882-83 al 1887-88 pubblicata dalla Ragioneria Generale dello Stato.

STRINGHER V. *Gli scambi con l'estero e la politica commerciale italiana dal 1860 al 1910* in « Cinquanta anni di storia italiana » op. cit.

SUPINO C. *Economia politica.* VI Edizione. Milano. Albrighi, Segati e C. 1923.

TANGORRA V. *Trattato di scienza delle finanze.* Vol. I, Milano 1915. Soc. Edit. Libraria.

Taxation (Burden of Italian) and its incidence upon the national income. By the Direction General of Direct taxation. Roma. 1925. Libreria del Provveditorato Generale dello Stato.

Taxes and Dues in Italy before and after the war. By the Director General of Direct taxation. Roma 1925. Libreria del Provveditorato Generale dello Stato.

TIVARONI CARLO. *Storia critica del Risorgimento Italiano.* Vol. dal IV al IX° incluso. Torino. Roux e C. 1892, 1893, 1894. Roux Frassati e C. 1895, 1896, 1897.

TIVARONI J. *Patrimonio e reddito di alcune Nazioni civili.* Torino. Roux e Viarengo. 1901.

— *Il reddito Nazionale in Italia* in « Critica Sociale » 1906.

VALENTI G. *L'Italia agricola dal 1861 al 1911* in « Cinquanta anni di storia italiana » op. cit.

VILLARI P. *Le lettere meridionali ed altri scritti sulla questione sociale in Italia.* Firenze. Success. Le Monnier 1878.

ZINI L. *Storia d'Italia.* Vol. II. Milano. 1869.

ZOBI A. *Saggio sulle mutazioni politiche ed economiche avvenute in Italia dal 1859 al 1878.* Firenze. Botta. 1870.

ZORLI A. *I dati di fatto nella scienza dei tributi.* Macerata. Topi. 1897.

WAGNER A. *Les fondements de l'économie politique* (traduz. francese), 2 Vol. Parigi Giard et Brière. 1904-1909.

† Georg von Mayr.

1841 - 1925.

Mit MAYR ist ein Mann von uns geschieden, dessen Namen in den vielfach verschlungenen Wegen der Entwickelungsgeschichte der Statistik, insbesondere der deutschen, einen Markstein bedeutet. Er hat den sich bildenden neuen Meinungen eine klare Form gegeben und ihre Ziele umschrieben mit nimmer rastendem Fleisse, der darauf gerichtet war, durch sorgfältige Pflege auch des scheinbar Nebensächlichen, aber immer im Hinblick auf den grossen Endzweck, ein Gebäude der Statistik in seinem Sinne zu errichten. Am 12. Feb. 1841 in Würzburg geboren, begann MAYR bereits 1866, sich in der Statistik als Assistent am Bayrischen Statistischen Bureau unter der Leitung seines späteren Schwiegervaters v. HERMANN praktisch zu betätigen, und seitdem hat sein Wirken bald mehr bald weniger hauptsächlich, doch ununterbrochen der Statistik gegolten. Schon vor seinem Eintritt ins Statistische Amt Privatdozent an der Münchener Universität, führte er dieses Lehramt seit 1868 als ausserordentlicher Professor weiter, auch nachdem er im darauffolgenden Jahre zum Leiter des Statistischen Bureaus ernannt worden war; in dieser Eigenschaft nahm er an den Arbeiten der Kommission teil, die Grundsätze für die Errichtung einer Statistik des Deutschen Reiches aufzustellen hatte. Später, von 1872 ab, teilte er sich in die statistische Amtstätigkeit und die als Referent für Zoll- und Handelspolitik im bayrischen Ministerium. Doch schied er im Jahre 1879, nachdem er in den persönlichen Adelsstand erhoben war, aus dem statistischen Verwaltungsdienst aus, infolge seiner Berufung nach Strassburg, wo er die Abteilung für Finanzen und Domänen im elsässischen Ministerium bis 1887 leitete. Er wandte sich nun bald von Neuem seiner früheren Lehrtätigkeit zu und zwar zunächst an der Strassburger Universität, wo er nunmehr Nationalökonomie, Finanzwissenschaft und Statistik dozierte, und von wo er 1898 als ord.

Professor für diese Fächer an die Münchener Universität zurückberufen wurde. Erst der Tod beendete seine dortige Lehrtätigkeit, die er auch nach der Verlegung seines Wohnsitzes von München nach dem eine Eisenbahnstunde entfernten Tutzing und der für den bereits Hochbetagten damit verbundenen Erschwerung nicht unterbrach. Anlässlich seines 70. Geburtstags wurde in seinem Hause die « Deutsche Statistische Gesellschaft » begründet, deren Vorsitz er übernahm und bis zu seinem Lebensende führte. Dem Unterzeichneten gab in seiner Eigenschaft als Geschäftsführer der Gesellschaft die Zusammenarbeit mit v. Mayr immer wieder Gelegenheit, dessen ungeminderte Begeisterung für den Leitstern seiner wissenschaftlichen Bestrebungen, die Statistik, zu bewundern.

G. v. Mayr hat eine der Lieblingsaufgaben seines Lebens in der selbständigen Eingliederung des statistischen Wissens in das System der Realwissenschaften erblickt. Seiner schriftstellerischen Fruchtbarkeit ist eine grosse Anzahl von kleineren und grösseren Abhandlungen zu danken, durch die er seine Auffassung vom Wesen der Statistik als Wissenschaft der Massenerscheinungen des Gesellschaftslebens begründet hat; sie sind so vollständig, als es möglich war, in der nachfolgenden Übersicht verzeichnet, und, soweit sie aus Mayr's späterer Lebenszeit stammen, zum erheblichen Teil in der von ihm 1890 begründeten Zeitschrift « Allgemeines Statistisches Archiv » enthalten. Die Ergebnisse seiner Auffassungen auf statistischem Gebiet sind mit Erweiterungen nach allen Richtungen in seinem Lebenswerk « Statistik und Gesellschaftslehre » zusammengestellt, dessen zwei erste Bände « Theoretische Statistik » « Bevölkerungsstatistik » er noch in zweiter Auflage bearbeiten konnte; der dritte Band « Moralstatistik » erschien 1917 und nur der vierte, der die Wirtschafts- und Kulturstatistik bringen sollte, blieb uns vorenthalten, als Mayr am 6. September 1925 die Augen schloss.

Dem Internationalen Statistischen Institut gehörte v. Mayr von Anfang an als Ehrenmitglied und von 1911-1923 als Vizepräsident an.

Eugen Würzburger.

GEORG VON MAYR

Schrifttum.

Theorie, Technik und Organisation der Statistik.

Statistik und Gesellschaftslehre:

I. Bd. Theoretische Statistik. I. Aufl. 1895; II. Aufl. 1914.

II. Bd. Bevölkerungsstatistik. I. Aufl. 1897; II. umgearbeitete und vermehrte Aufl. 1922/26.

III. Bd. Moralstatistik. 1909/17.

Die Gesetzmässigkeit im Gesellschaftsleben. München 1877. Ins Ungarische übersetzt von Körösi, ins Russische von Romanow unter Leitung Tschuprows (1. u. 2. Auflage), ins Italienische von Salvioni. Von letzterer Uebersetzung 2. erheblich erweiterte Aufl. unter dem Titel: Mayr e Salvioni, « La statistica e la vita sociale » (Torino 1886).

Begriff u. Gliederung der Staatswissenschaften. Tübingen I. Aufl. 1901. (Aus: Festgabe f. Albert Schäffle, Tübingen 1901; 2. Aufl. 1906); 4. Aufl. 1921.

Statistik als Staatswissenschaft. « Allg. Stat. Archiv » VIII. Bd.

Die Staatswissenschaft und ihr Standort im Universitätsunterricht. (Rede). München 1913.

Die Stoffordnung in der wissenschaftl. Statistik. « Allg. Stat. Archiv » V. Bd.

Die Berechtigung der Moralstatistik. « Allg. Stat. Archiv » VII. Bd.

Zur Verständigung über die Anwendung der « geographischen Methode » in der Statistik. « Ztschr. d. Bayr. Stat. Bureaus » 1871 III. Desgl. Gutachten ebenda 1873 I. u. II.

Die statistischen Gesetze. « Bull. de l'Inst. Intern. de Statistique ». Tome IX, 2; S. 296.

Gesetzmässiges in anscheinend Gleichgültigem. « Hochland » I. Jahrg. 1904.

Ein moderner Statist. « Allg. Stat. Archiv » VI. Bd.

Ueber die Grenzen der Vergleichbarkeit stat. Erhebungen mit einer Skizze der Entwicklung des Handwerks in den Bayrischen Städten diesseits des Rheins. (Habilitations-Schrift) München 1886.

Die Grenzen des schriftlichen Verfahrens bei statistischen Ermittlungen. « Allg. Stat. Archiv » IV. Bd.

Das Zählblättchen und der britisch-indische Zensus von 1901. « Allg. Stat. Archiv » VI. Bd.

Die Verwendung des Zählblättchens bei der Volkszählung in Britisch-Indien vom 1./3. 1901. « Allg. Stat. Archiv » VII. Bd.

Zur Methodik u. Technik stat. Karten. « Allg. Stat. Archiv » VII. Bd.
Elektrische Auszählung und Sozialpolitik. « Allg. Stat. Archiv » V. Bd.
Zur Publikationstechnik. « Allg. Stat. Archiv » II. Bd.
De la meilleure méthode à suivre dans l'élaboration des publications officielles de statistique. « Bull. de l'Inst. Intern. de Stat. » VI. S. 57.
Die Bestimmungen für die Volkszählung im Dt. Reich vom 1. XII. 1900. « Allg. Stat. Archiv » VI. Bd.
Meine Kritik der preuss. Volkszählungsformulare. « Allg. Stat. Archiv » III. Bd.
Wesen und Ziele der Bevölkerungsstatistik. « Ztschr. d. Bayr. Stat. Bureaus » 1876 I.
Quellen der Sozialstatistik. « Bull. de l'Inst. Intern. de Statistique » 1889.
Zur Systematik der Wirtschaftsstatistik. « Allg. Stat. Archiv » XI. Bd.
Orientierungswesen und Statistik. « Allg. Stat. Archiv » I. Bd.
Die amtliche Statistik in Bayern. « Bericht an die 8. Versammlung des intern. stat. Kongresses », München 1872.
Umgestaltung der amtlichen Statistik der Vereinigten Staaten von Amerika. « Allg. Stat. Archiv » VI. Bd.
Gutachten über Zentralisation u. Dezentralisation der stat.-techn. Tätigkeit. « Ztschr. des Bayr. Stat. Bureaus » 1873 I. u. II.
Die Bedeutung der Statistik für die Verwaltung u. die Wissenschaft. München 1909.
Verwaltungspolitik und Statistik im « Handb. d. Politik. » (1920)
Statistik und Verwaltung. « Allg. Stat. Archiv » I. Bd.
Soziologie u. Statistik. « Allg. Stat. Archiv » XII. Bd.
Kommunalpolitik u. Kommunalstatistik. « Annalen des Dt. Reiches » 1904.
Die Statistik auf 3 internationalen Kongressen des Jahres 1891. « Ztschr. f. Volksw., Sozialpolitik u. Verwaltung » (Wien) I. Bd. 1892.
Vier Berichte für den II. intern. Kongress für Hygiene u. Demographie in Brüssel, Abt. Demographie, über bevölkerungsstatistische Fragen u. über Selbstmordstatistik. Brüssel 1903.
Die Ausgestaltung des Hochschulunterrichtes in der Statistik an den Universitäten. « Allg. Stat. Archiv » VIII. Bd.

Bevölkerungsstand.

Volkszählung. Artikel im « Wörterbuch d. Dt. Verwaltungsrechts». (Freiburg 1890).
Zur deutschen Säkularzählung von 1900. « Allg. Stat. Archiv » V. Bd.
Zahl und Sprachgebiete der Deutschen. « Vortrag » München 1871.
Die Volkszählung des Kgr. Bayern vom 3. XII. 1867, 2 Teile, München 1868 und 1872.
Die bayr. Bevölkerung nach Geschlecht, Alter u. Zivilstand. München 1875.
Die bayr. Bevölkerung nach der Gebürtigkeit. München 1876.
Die bayr. Jugend nach der Farbe der Augen, der Haare u. der Haut. « Ztschr. d. Bayr. Stat. Bureaus » 1875 IV.

Ueber Unterschiede im Altersaufbau der Bevölkerung. « Beiträge zur Anthropologie u. Vorgeschichte Bayerns » 1890.

Die Bevölkerung von München nach Alter u. Zivilstand. « Ztschr. d. Bayr. Stat. Bureaus » 1869 II.

Die Bevölkerung der Städte Nürnberg, Augsburg u. Würzburg nach Alter u. Zivilstand. « Ztschr. d. Bayr. Stat. Bureaus » 1870 IV.

Die Bevölkerung der Grosstädte. « Jahrb. der Gehestiftung zu Dresden » Bd. 9 (1903).

Die britisch-indische Bevölkerung nach den Ergebnissen der Volkszählung von 1901. « Allg. Stat. Archiv » VII. Bd.

Internationaler Jahresbericht über Bevölkerungsstand und Bevölkerungsbewegung. « Allg. Stat. Archiv » III. u. IV. Bd.

Berufsstatistik.

Zur Technik der Ausbeutung berufsstatistischer Angaben. « Allg. Stat. Archiv » IV. Bd.

Berufs- u. Gewerbe-Zählung: Artikel im Wörterbuch d. Dt. Verwaltungsrechts, I. Bd. Freiburg 1890.

Die Reichstagsverhandlungen über die Berufs- und Gewerbezählung von 1895. « Allg. Stat. Archiv » IV. Bd.

Die Veröffentlichungen des Kais. Stat. Amts über die Ergebnisse der Berufs- und Gewerbezählung von 1895. « Allg. Stat. Archiv » V. u. VI. Bd.

Studienmaterial zu den Vorerwägungen für die nächste Deutsche Berufs- u. Betriebszählung. « Ztschr. f. Staatswissenschaft » 1903.

Bevölkerungsbewegung.

Diagramme der bayrischen Bevölkerungsbewegung im halben Jahrh. 1825/26-1874/75. « Ztschr. d. Bayr. Stat. Bureaus » 1878 I.

Die Bewegung der Bevölkerung im Kgr. Bayern. « Beitrag zur Stat. des Kgr. Bayern » 1878, 1879.

Die Eheschliessungen in Bayern während der 6jährigen Periode 1862/63 bis 1867/68 mit Rückblicken. « Ztschr. d. Bayer. Stat. Bureaus » 1869 I.

Die Geburtenhäufigheit i. Bayern. « Ztschr. d. Bayr. Stat. Bureaus » 1877 IV.

Die Sterblichkeit i. Dt. Reiche während des Jahres 1887. München. mediz. Wochenschrift 1889, Nr. 14.

Die Sterblichkeit der Kinder während des 1. Lebensjahres in Süddeutschl. insbes. in Bayern. « Ztsch. d. Bayr. Stat. Bureaus » 1870 IV.

Bevölkerungsbewegung. Intern. stat. Uebersichten. « Allg. Stat. Archiv » III. Bd.

Internationale Jahresberichte über die Bevölkerungsbewegung. « Bull. de l'Inst. Inter. de Stat. ». Tome IX, 2.

Statistik der äusseren Wanderungen. Berlin 1903.

Die Ziele des Ausbaus der Auswanderungsstatistik. « Bull. de l'Inst. Intern. de Stat. ». Tome XIII, 1.

Die Statistik der äusseren Wanderungen. « Bull. de l'Inst. Intern. de Stat. ». Tome XIV, 2.

Statistik der deutschen Binnenwanderungen. « Schriften des Vereins für Sozialpolitik » Bd. LVIII 1893.

Todesursachenstatistik.

Reform der Todesursachenstatistik der Schweiz. « Allg. Stat. Archiv » V. Band.

Art. Selbstmordstatistik. « Handwörterb. der Staatswissensch. » I. und II. Aufl.; III. Aufl. von Wadler überarbeitet.

Die Selbstmorde im Deutschen Reich von 1881-1894. « Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik » LXVII. Bd. 1896.

Der Selbstmord. Internationale statistische Uebersichten. « Allg. Stat. Archiv » IV. Bd.

Statistik der Todesursachen in Italien. « Münchener Medizinische Wochenschrift » 1888, Nr. 10 u. 11 und 1891, Nr. 18.

Bau- und Wohnungsstatistik.

Die Gebäudezählung im Königreich Bayern vom Sommer 1867. München 1869.

Internationale Statistik der Gebäude. München 1878.

Preis- und Verbrauchsstatistik.

Ueber die nationalwirtschaftliche Bedeutung des Standes der Holzpreise. « Krit. Blätter f. Forst- u. Jadgwissenschaft » XLIX. Bd. (1866).

Die Fleischnahrung der Münchener Bevölkerung. « Zeitschr. des Bayer. Stat. Bureaus » 1871, I.

Vermögen und Einkommen.

Volksvermögen, Staatsvermögen und Statistik. « Allg. Statist. Archiv ». X. Bd.

Land- und Forstwirtschaft.

Landwirtschaftliche Statistik. Artikel im « Wörterbuch des deutsch. Verwaltungsrechts » (Freiburg 1890).

Resultate einer Vergleichung land- und forstwirtschaftlicher Erträgnisse. « Zeitschr. d. landwirtschaftl. Vereins in Bayern » 1862.

Vier Karten über den Bodenertrag im Königreich Bayern. « Beiträge zur Statistik des Königreichs Bayern » 1867.

Statistische Nachweise über den Vollzug der Bodenkulturgesetze in Bayern. München 1871.

Die Ernteergebnisse des Jahres 1873 in Bayern mit einer Karte der Hagelschläge. « Zeitschr. des Bayer. Statist. Bureaus » 1873 I u. II.

Einfluss des Waldes auf Klima und Bodenbeschaffenheit. « Kritische Blätter für Forst- und Jagdwissenschaft » XLVI, 1. Heft (1863).

Die Viehzählung im Königreich Bayern vom 10. I. 1873. München 1874.

Gewerbestatistik.

Die gegenwärtigen Aussichten für allgemeine deutsche Gewerbestatistik. « Zeitschr. des Bayer. Statist. Bureaus » 1874 IV.

Bayerische Gewerbestatistik I. München 1879.

Die vorläufigen Ergebnisse der Gewerbestatistik. Aufnahme vom 1. XII. 1875 in Bayern. « Zeitschr. des Bayer. Statist. Bureaus » 1877, I.

Die Entwicklung des Handwerks in den Städten des Königreichs Bayern diess. d. Rheins. « Jahrb. f. Nationalökomie u. Statistik » VI. Band 1866.

Statistik des Bergwerks-, Salinen- und Hüttenbetriebs in Bayern während der Jahre 1871 und 1872 nebst Nachweisungen über die Knappschaftsvereine in Bayern für 1871 mit Rückblicken. « Zeitschr. des Bayer. Statist. Bureaus » 1872 III.

Statistik der in Bayer. Fabriken und in grösseren Gewerbebetrieben zum Besten der Arbeiter getroffenen Einrichtungen. « Zeitschr. des Bayer. Statist. Bureaus » 1875 I u. II.

Die belgische Industrie- und Gewerbezählung von 1896. « Allg. Stat. Archiv » II. Bd.

Handelsstatistik.

Der Handel Bayerns mit und über Bremen. « Zeitschr. des Bayer. Stat. Bureaus » 1870 III.

Die monatl. Handels- und Finanzausweise der Vereinigten Staaten als wirtschaftsstat. Quellenwerk. « Annalen des Deutschen Reiches » 1904.

Bank-, Geld- und Kreditwesen.

Statistik der Bayer. Sparkassen. « Beiträge zur Statistik des Königreichs Bayern » 1873.

Arbeitsstatistik.

Deutsche Arbeiterstatistik. « Allg. Stat. Archiv » III. Bd.

Oesterr. Gesetzentwurf betr. die Arbeitsstatistik. « Allg. Stat. Archiv » III. Bd.

Versicherungsstatistik.

Arbeiterversicherung und Sozialstatistik. « Archiv für soziale Gesetzgebung und Statistik » 1888.

Ueber Sammlung und Verwertung des durch die Arbeiterversicherung gebotenen sozialstatistischen Materials. « Allg. Stat. Archiv » II. Bd.

Unfallversicherung und Unfallfrequenz ; die Fabrikinspektion in Deutschland. « Referate für d. Mailänder Unfallkongress » 1894.

Statistische Nachweisungen über das Immobiliarbrandversicherungs esen im Kgr. Bayern diesseits des Rheins. München 1870.

Statistik der Immobiliarfeuerversicherung im Gebiete des Kgr. Bayerns diess. d. Rheins für 1868/69 mit Rückblicken. « Zeitschr. des Bayer. Stat. Bureaus » 1870 III.

Statistik der Verbände.

Der Statistische Dienst bei den wirtschaftlichen Verbänden im Deutsch. Reich. « Allgemeines Statist. Archiv » IV. Bd.

Wahlstatistik.

Beiträge zur Statistik der Wahlen zur bayer. Kammer von 1869 mit Rückblicken auf die Wahlen zum Zollparlament. « Zeitschr. des Bayer. Statist. Bureaus » 1869 I.

Wahlen der Abgeordneten zum bayer. Landtag von 1869 mit Rückblicken « Zeitschr. d. Bayer. Stat. Bureaus » 1870 I.

Statistik der Wahlen zum Deutschen Reichstage vom Jahre 1871 in Bayern. « Zeitschr. d. Bayer. Statist. Bureaus » 1871 III. Dgl. für 1874. Ebenda 1874 IV.

Statistik der Gesundheitspflege.

Statistik der Blinden, Taubstummen, Blödsinnigen und Irrsinnigen. « Zeitschr. des Bayer. Statist. Bureaus » 1876 II.

Die Verbreitung der Blindheit, der Taubstummheit, des Blödsinns und des Irrsinns in Bayern. München 1877.

Beiträge zur bayer. Medizinalstatistik « Zeitschr. d. Bayer. Statist. Bureaus » 1877 IV.

Armen- und Wohlfahrtsstatistik.

Statistische Nachweisungen über das Armenesen in Bayern für 1868 mit Rückblicken. « Zeitschr. d. Bayer. Statist. Bureaus » 1869 II. Dgl. für 1869. Ebenda 1871 II.

Statistik der Bettler und Vaganten im Königreich Bayern. (Diss.) München 1865.

Bildungsstatistik.

Zur Literatur und Theorie der Unterrichtsstatistik. « Zeitschr. d. Bayer. Stat Bureaus » 1877 II u. III.

Die Reform der bayer. Unterrichtsstatistik nebst einigen Hauptergebnissen dieser Statistik. « Zeitschr. d. Bayer. Statist. Bureaus » 1872 II.

Die Lernmasse der höheren Schulen des Deutschen Reiches. « Allg. Stat. Archiv » III. Bd.

Statistik des Unterrichts und der Erziehung im Kgr. Bayern. 2 Teile. München 1873, 1875.

Ueber die durchschnittliche Schulentfernung der Bevölkerung. « Zeitschr. des Bayer. Statist. Bureaus » 1876 I.

Die Beteiligung der bayer. Bevölkerung am technischen Studium. « Zeitschr. d. Bayer. Statist. Bureaus » 1874 IV.

Die Kgl. Bayer. Ludwig-Maximilians-Universität München. In : « Das Unterrichtswesen im Deutschen Reiche » Berlin 1904.

Statistik der Vereine für Bildungszwecke in Bayern. München 1874.

(Justiz-) Kriminalstatistik.

Kriminalstatistische Probleme. « Allg. Statist. Archiv » IX. Bd.

Wesen und Ziele der Kriminalstatistik. « Jahrbücher für Kriminalstatistik » I. Bd. 1895.

Vorlage, die Kriminalstatistik betr., für den intern. statist. Kongress in Petersburg. « Zeitschr. d. Bayer. Statist. Bureaus » 1871 IV.

Die Nutzbarmachung der Kriminalstatistik. « Monatsschrift für Kriminalpsychologie und Strafrechtsreform » I, 1904.

Die zweckmässige Ausgestaltung der Strafvollzugsstatistik, inbes. der Gefängnisstatistik. « Allg. Statist. Archiv ». XIV. Bd.

Zur Reform der Rückfallstatistik. « Allg. Statist. Archiv » III. Bd.

Zur Organisation der Rückfallstatistik. « Allg. Statist. Archiv » IV. Bd.

Ergebnisse der Strafrechtspflege im Kgr. Bayern während d. Jahre 1861/63 bis 1865/66. München 1868.

Statistik der gerichtlichen Polizei im Kgr. Bayern und in einigen anderen Ländern. « Beiträge zur Statistik des Kgr. Bayerns » München 1867.

Finanzstatistik.

Beiträge zur Statistik der Gemeindebesteuerung in Bayern. « Zeitschr. d. Bayer. Statist. Bureaus » 1878 IV.

Sonstiges

Ergebnisse des Ersatzgeschäfts. « Zeitschr. d. Bayer. Statist. Bureaus » 1870 I.

Direttore responsabile: CORRADO GINI.

Città di Castello - Società Anonima Tipografica « Leonardo da Vinci ».